А.С. Рылов, А.В. Тронин

Домашняя работа по геометрии за 10 класс

к учебнику «Геометрия, 10–11: Учеб.
для общеобразоват. учреждений /
Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. —
11-е изд. — М.: Просвещение, 2002 г.»

ВВЕДЕНИЕ

1.

Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости. Поэтому:

а) $PE \subset$ пл. ADB;

$MK \subset$ пл. BCD, $DB = ADB \cap CBD$, $DB \in ADB$, $DB \in CBD$;

$AB = ABC \cap DAB$, $AB \in ABC$ и $AB \in DAB$;

$EC \subset ABC$, т.к. $C \in ABC$, и $E \in ABC$.

б) $DK \not\subset ABC$, $C \in DK$, $C \in ABC$, значит, $DK \cap ABC = C$ (см. рис. 5, б) на стр. 6 учебника);

$E \in CE$, $E \in ABD$, $CE \not\subset ABC$, значит, $CE \cap ADB = E;$

$CE \cap ADB = E$;

в) A, D, B, P, M, $E \in$ пл. ADB; D, B, C, M, $K \in DBC$.

Точки, лежащие в ADB и DBC одновременно: D, B, M.

г) $ABC \cap DCB = BC$; $ABD \cap CDA = AD$; $PDC \cap ABC – CE$.

2.

а) Точки, лежащие в DCC_1: D, D_1, C_1, C, K, M, R;

точки, лежащие в плоскости BQC: B, B_1, C_1, C, P, Q, M.

точки, принадлежащие этим плоскостям: C_1, C, M.

б) $AA_1 \subset AA_1D_1$ и $AA_1 \subset AA_1B_1$.

в) $MK \cap ABD = R$; $DK \cap A_1B_1C_1 = D_1$; $BP \cap A_1B_1C_1 = Q$.

г) AB – прямая пересечения AA_1B и $ACD;$

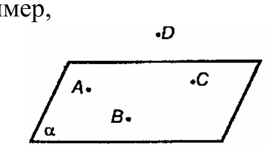
BC – прямая пересечения PB_1C_1 и ABC.

д) MK и DC пересекаются в точке R; B_1C_1 и BP пересекаются в точке Q; C_1M и DC пересекаются в точке C.

3.

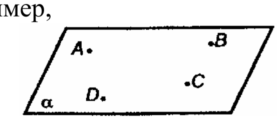
а) Да (аксиома A_1).

б) Неверно. Например,



A, B, $C \in \beta$, $D \in \beta$.

в) Неверно. Например,

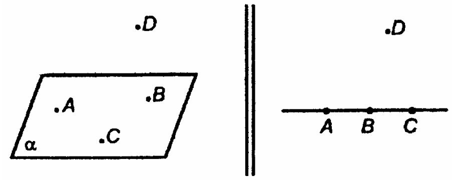


A, B, C, $D \in \alpha$.

г) Через любые 3 точки проходит плоскость. Но утверждение о единственности неверно. Не всегда.

4.

а) Рассмотрим два случая



Никакие три точки не лежат на одной прямой. Сама пл. α существует по аксиоме A_1. Условие задачи выполнено

По теореме п. 3 D и прямая лежат в одной плоскости, что противоречит условию задачи.

Ответ: нет.

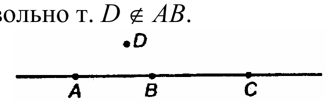
б) Если $AB \cap CD$, то через них можно провести плоскость, тогда все точки будут в одной плоскости, а это противоречит условию задачи (по следствию из аксиом).

Ответ: нет.

Ответ: а) нет; б) нет.

5.

Выберем произвольно т. $D \notin AB$.

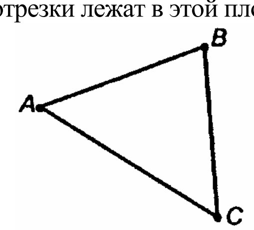


По теореме п. 3 через D и прямую можно провести единственную плоскость, таких плоскостей можно провести бесконечно много, в силу того, что точка D выбрана произвольно.

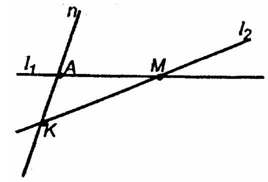
Ответ: бесконечное множество.

6.

Через три точки можно провести единственную плоскость. В силу того, что две точки каждого отрезка принадлежат этой плоскости (концы отрезков), то и все отрезки лежат в этой плоскости (аксиома A_2).



7.

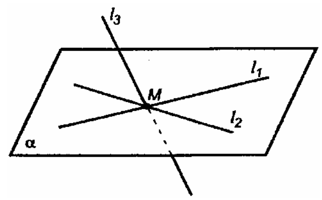


Пусть $l_1 \cap l_2 = M$; n – произвольная прямая, $M \notin n$ и n пересекает l_1и l_2 в точках A и K, значит, через т. A и прямую l_2 можно провести единственную плоскость (по теореме п. 3). Поэтому отрезки AM, AK и KM лежат в одной плоскости (по аксиоме A_2 п. 2), и прямые, которым принадлежат эти отрезки, лежат в одной плоскости.

Все прямые, проходящие через т. M, не лежат в одной плоскости.

Если в теореме п. 3 речь идет только о двух пересекающихся прямых, через которые проходит единственная плоскость. Если прямых несколько, то утверждение неверно.

Например:

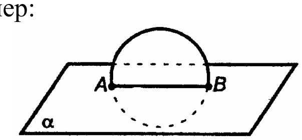


l_3 пересекает пл. α, но $M \in l_3$

Ответ: нет.

8.

а) Неверно. Пример:

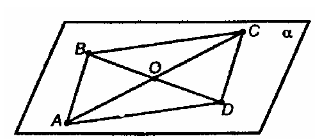


$A \in \alpha$, $B \in \alpha$. Но окружность пересекает α и не лежит в ней.

б) Верно, так как три точки однозначно задают окружность, поэтому все ее точки будут лежать в заданной плоскости.

Ответ: а) нет; б) да.

9.



A, B, $O \in \alpha$.

Так как A, $O \in \alpha$, по A_2, то $C \in \alpha$ (поскольку $C \in AO$, $AO \subset \alpha$). Так как B, $O \in \alpha$, по A_2, то $D \in \alpha$ ($D \in BO$, $BO \subset \alpha$). Значит, C и D лежат в α.

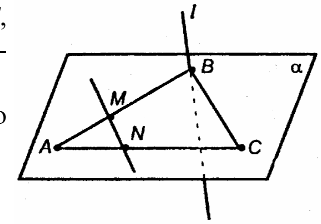
Ответ: да.

10.

Если MN пересекает стороны ΔABC, а $\Delta ABC \in \alpha$, то $M \in \alpha$ и $N \in \alpha$. Из аксиомы A_2 прямая MN лежит в пл. α.

Прямая l пересекает α в точке B, но не обязательно лежит в ней.

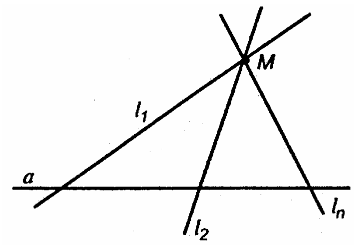
Ответ: а) да; б) нет.



11.

Пусть есть прямая a, точка M и $M \notin a$.

Из теоремы п. 3, через a и M проходит единственная плоскость α. Прямые, пересекающие a, пересекают ее в точке, лежащей в α. Точка M – общая для всех прямых l_1, l_2, l_3 и $M \in \alpha$.

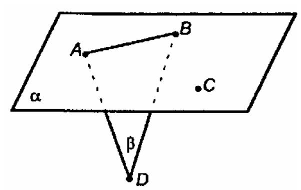


Тогда по аксиоме A_2 каждая прямая l_1, l_2, l_3 лежит в плоскость α, так как две точки каждой прямой лежат в α.

12.

Поскольку плоскости ABC и ABD имеют общую точку A, то они пересекаются по прямой, проходящей через т. A (аксиома A_3).

Ответ: да.



13.

а) Неверно, по аксиоме A_3 они пересекаются по прямой.

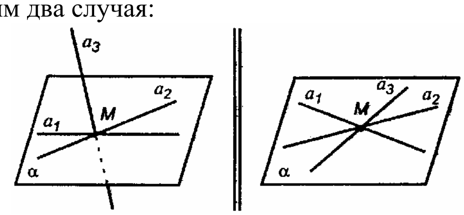
б) Неверно, по той же причине.

в) Верно, по аксиоме A_3.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

14.

Рассмотрим два случая:

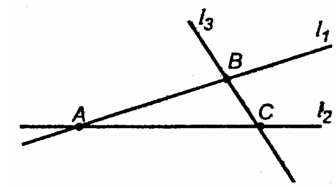


а) Из теоремы п. 3 имеем, что через каждый две пересекающиеся прямые можно провести единственную плоскость; поэтому через данные три прямые проведено 3 плоскости.

б) Если все три прямые лежат в одной плоскости, то плоскости, упомянутые в п. а, совпадают.

Ответ: или три или одну плоскость.

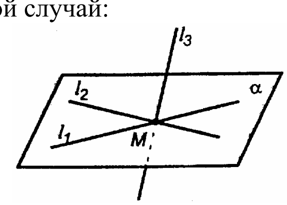
15.



Каждая из трех точек принадлежит одновременно прямым.

Через три точки по аксиоме A_1 можно провести единственную плоскость α. Поэтому отрезки AB, BC и AC лежат в плоскость α (по аксиоме A_2), значит, прямые, которым принадлежат эти отрезки, тоже лежат в α.

Рассмотрим второй случай:

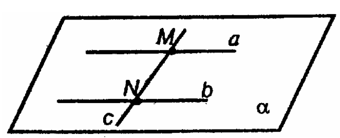


$l_1, l_2 \subset \alpha$, а $l_3 \not\subset \alpha$, но и пересекается с l_2 и l_1 в точке M.

То есть прямые имеют общую точку, но не лежат в одной плоскости.

ГЛАВА I
ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

16.



Так как $M \in \alpha$, $N \in \alpha$; $M \in c$, $N \in c$, поэтому $MN \subset \alpha$, $\Rightarrow c \subset \alpha$.

17.

Поскольку

ΔADB: PM средняя линия, то $PM \parallel AD$;

ΔADC: QN средняя линия, то $QN \parallel AD$.

Из условий

$\left.\begin{array}{l} PM \parallel AD \\ QN \parallel AD \end{array}\right\}$ по теореме п. 5 получим: $PM \parallel QN$.

Отсюда следует, что P, Q, M и N лежат в 1 плоскости.

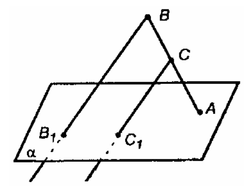
Получим, что MN и PQ – средние линии в ΔBDC и ΔABC, значит, $MN \parallel BC$ и $PQ \parallel BC$. Имеем из теоремы п. 5 $MN \parallel PQ$.

Значит, 4-угольник $MNPO$ – параллелограмм по определению (т.к. является плоским четырехугольником).

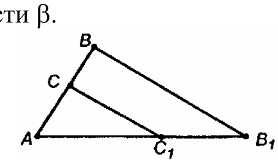
$$P_{MNPQ} = 2 \cdot PM + 2 \cdot PQ = 2 \cdot \frac{1}{2} AD + 2 \cdot \frac{1}{2} BC = 12 + 13 = 26 .$$

Ответ: 26 см.

18.



Так как $BB_1 \parallel CC_1$, то эти отрезки лежат в одной плоскости β (из определения). Тогда $C \in \beta$ и $B \in \beta$, поэтому $BC \subset \beta$. Значит, прямые BB_1, CC_1, $AB \subset \beta$.



Рассмотрим треугольник AB_1B в плоскости β.

$\Delta CAC_1 \sim \Delta BAB_1$ (по 2-м углам)

Из подобия имеем:

$$\frac{CC_1}{BB_1} = \frac{AC}{AB}; \frac{CC_1}{7} = \frac{1}{2};\ CC_1 = 3{,}5$$

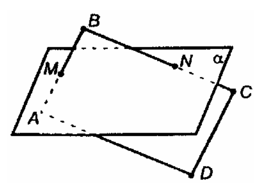
б) Аналогично

$$\frac{CC_1}{20} = \frac{AC}{AB}, \frac{AC}{CB} = \frac{3}{2}, \quad AB = AC + CB = AC + \frac{2}{3} AC ,$$

$$\frac{CC_1}{20} = \frac{AC}{AC\left(1 + \frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{5},\ CC_1 = 20 \cdot \frac{3}{5} = 12 .$$

Ответ: а) 3,5 см; б) 12 см.

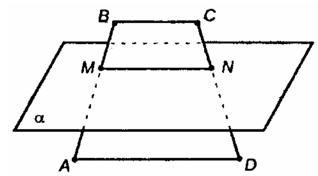
19.



По лемме п. 5 CD пересечет α, т.к. $CD \parallel AB$, а AB пересекает α.

По лемме п. 5 AD пересечет α, т.к. $AD \parallel BC$, а BC пересекает α.

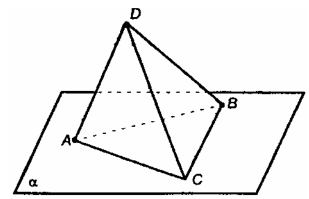
20.



По свойству средней линии $BC \parallel MN$, $MN \subset \alpha$, а по теореме I $BC \parallel \alpha$, следовательно, не пересекает.

$AD \parallel MN$, $MN \subset \alpha$, по теореме I $AD \parallel \alpha$, следовательно, не пересекает.

21.



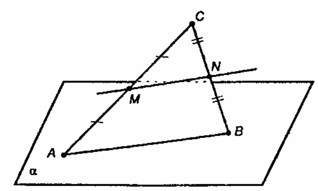
Допустим, прямая $l \parallel DC$.

DC пересекает пл. ADB, $l \parallel DC$, значит, (по лемме п. 5.1) l пересечет пл. ADB;

DC пересекает пл. ABC, $l \parallel DC$, значит, (по лемме п. 5.1) l пересечет пл. ABC.

Утверждение доказано.

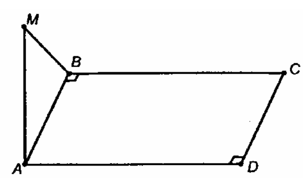
22.



В ΔABC: MN – средняя линия.

$MN \parallel AB$. Значит, по теореме I $MN \parallel \alpha$.

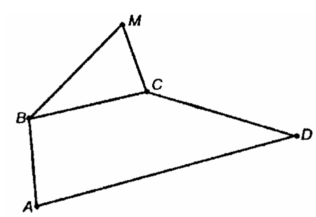
23.



По теореме I $CB \parallel ABM$, т.к. $CD \parallel AB$, а $AB \subset$ пл. ABM.

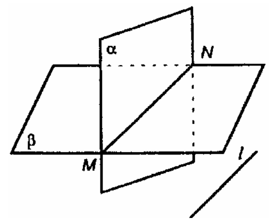
Утверждение доказано.

24.



Из теоремы I $AD \parallel$ пл. BMC, т.к. $AD \parallel BC$, а $BC \subset$ пл. BMC.

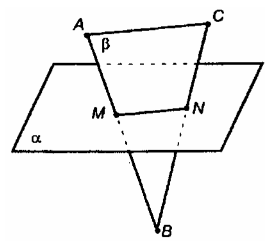
25.



Из теоремы I $l \parallel \alpha$, т.к. $l \parallel MN$, а $MN \subset \alpha$.

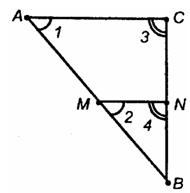
Из теоремы I $l \parallel \beta$, т.к. $l \parallel MN$, а $MN \subset \beta$.

26.



$AC \subset ABC$ ($AC \parallel \alpha$), и ABC пересекает плоскость α, линия пересечения MN параллельна прямой (AC) (по теореме II).

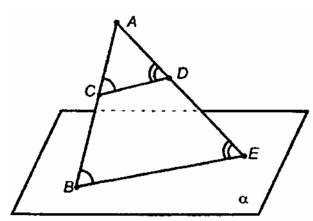
Значит, $MN \parallel AC$.



$AC \parallel MN$.

$\angle 1 = \angle 2$, как соответственные углы, $\angle ABC$ – общий, отсюда $\Delta ABC \sim \Delta MBN$ (по двум равным углам).

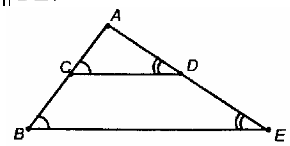
27.



$\frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$, CD $\parallel$ α, CD = 12. Найдем BE.

Т.к. B – общая точка, то плоскости ABE и α пересекаются.

Из теоремы II $CD \parallel BE$.

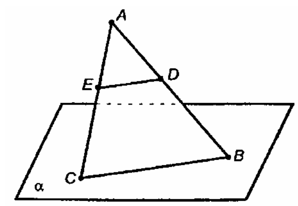


$\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ как соответственные, значит, $ABE \sim \Delta ACD$ по двум углам. Из подобия имеем:

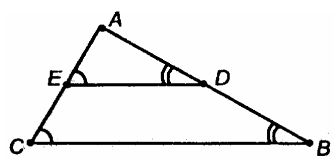
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}, \frac{AB - BC}{AB} = \frac{12}{BE}, 1 - \frac{3}{4} = \frac{12}{BE}, \; BE = 48.$$

28.

$DE = 5$, $\dfrac{BD}{DA} = \dfrac{2}{3}$;



$$\left.\begin{matrix} DE \parallel \alpha \\ DE \subset \text{пл.}\, ABC \end{matrix}\right\}$$ по утверждению из учебника $DE \parallel BC$.

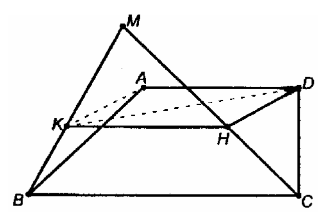


$\Delta BAC \sim \Delta DAE$ (по двум углам). Из подобия имеем:

$$\frac{BC}{DE} = \frac{AB}{AD} = 1 + \frac{DB}{AD};$$

$$\frac{BC}{5} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}, \; BC = 8\frac{1}{3}.$$

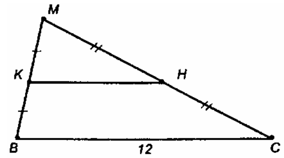
29.



По теореме I $AD \parallel BMC$ (т.к. $BC \subset BMC$, $AD \parallel BC$);

$$\left.\begin{aligned} &AD \parallel \text{пл.}\, BMC \\ &AD \subset \text{пл.}\, ADK \\ &ADK \cap BMC = K \end{aligned}\right\}$$ по утверждению из учебника пересечение плоскостей BMC и ADK – прямая KH – параллельна AD.

Рассмотрим плоскость ВМС:

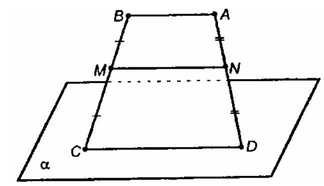


H – середина MC (по теореме о пропорциональных отрезках)

KH – средняя линия ΔBMC;

$$KH = \frac{1}{2} BC = 6.$$

30.



Плоскость $ABCD$ пересекает α по прямой, проходящей через т. C.

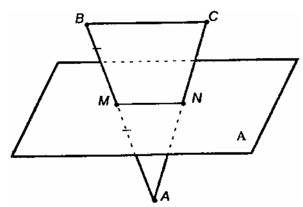
По доказанному в учебнике утверждению линия пересечения проходит через т. C и параллельна BA, а, значит, совпадает с основанием трапеции CD.

Значит, $CD \subset \alpha$.

$MN \parallel CD$, поэтому $MN \parallel \alpha$ (по теореме I).

Утверждение доказано.

31.



$BC \parallel \alpha$.

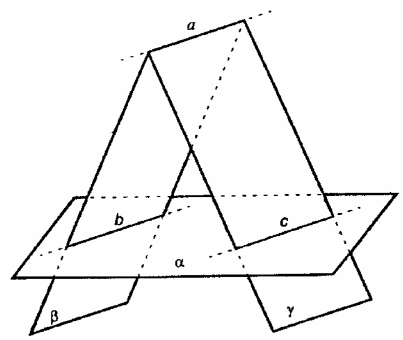
По утверждению, доказанному в учебнике, $MN \parallel BC$.

$BM = MA$, значит, MN – средняя линия ΔABC (по теореме о пропорциональных отрезках), и плоскость α проходит через середину стороны AC.

32.

Решение приведено в учебнике.

33.



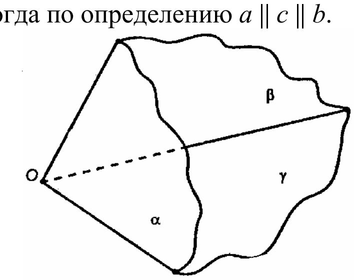
Пусть a не параллельна b, тогда a пересекается с b в некоторой точке K.

$K \in \gamma$, $K \in \alpha$.

Тогда плоскость γ пересекается с плоскостью α не только по прямой c, но еще по второй прямой, проходящей через т. K.

То есть точка $K \in c$. Получили, что либо плоскости имеют общую точку K (т.к. $K \in a$, $K \in b$, $K \in c$), либо наше допущение неверно, то есть $a \parallel b$. Если $a \parallel b$, то $a \parallel \alpha \Rightarrow a$ не пересекается с c, но лежит с ней в одной плоскости γ. Тогда по определению $a \parallel c \parallel b$.

В случае, когда плоскости имеют общую точку, они попарно пересекаются, образуя фигуру, называемую трехгранным углом.

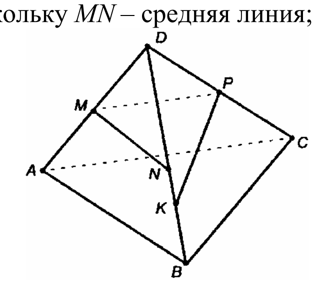


34.

а) $ND \cap AB =$ т. B;

б) $PK \cap BC$, поскольку PK не параллельна BC;

в) $MN \parallel AB$, поскольку MN – средняя линия;



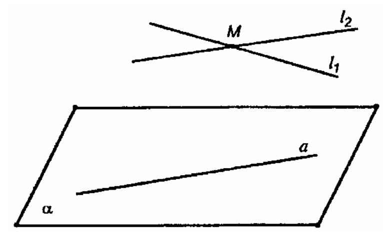
г) $MP \parallel AC$, поскольку MP – средняя линия;

д) KN и AC – скрещиваются, так как не параллельны и не пересекаются;

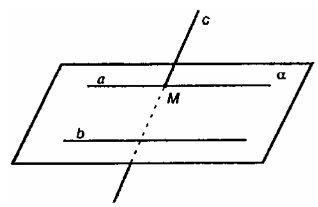
е) MD и BC – скрещиваются, так как не лежат в одной плоскости.

35.

Так как прямые не имеют общих точек с a, то они либо параллельны ей, либо скрещиваются с ней. Но обе они параллельны a быть не могут, так как имеют общую точку. Значит, по крайней мере одна из них скрещивается с a.



36.



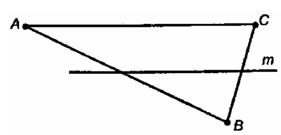
Т.к. $a \parallel b$, то существует пл. α, что $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$.

Пусть c пересекает a в т. M. $a \parallel b$, значит, $M \notin b$.

По признаку скрещивающихся прямых, c и b скрещиваются.

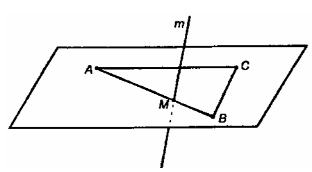
37.

а)



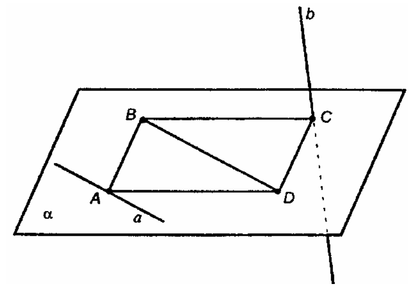
Так как AC и m не имеют общих точек и лежат в одной плоскости, то $AC \parallel m$; так как AC пересекается с BC, то и m пересекается с BC.

б)



BC и m скрещиваются, потому что т. $M \in AB$, $M \notin BC$ (по теореме п. 7).

38.



а) $a \parallel BD$;

BD и CD – пересекаются;

$a \subset \alpha$, $BD \subset \alpha$.

Следовательно, a не параллельна BD, а, значит, пересекает ее.

б) $a \in \alpha$;

a и b не лежат в одной плоскости, $b \cap \alpha = C$, $C \notin$ a.

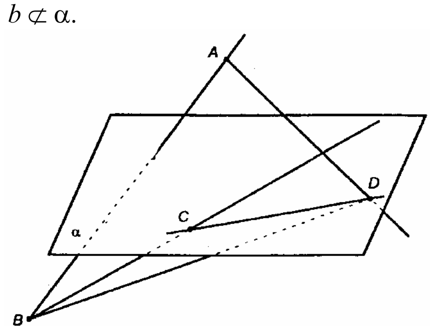
Следовательно, a и b скрещиваются (по признаку).

39.

Точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости (т.к. AB и CD скрещиваются). Следовательно, AD и BC тоже не лежат в одной плоскости, то есть не параллельны и не пересекаются $\Rightarrow$ скрещиваются.

40.

а) Скрещивающиеся прямые не лежат в одной плоскости. Следовательно, $b \not\subset \alpha$.



б) α и β имеют две общие точки: M и N, значит, прямая MN – общая для плоскостей α и β, значит, это линия их пересечения (по аксиоме A_2).

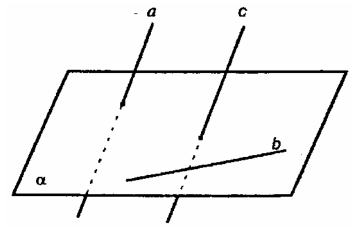
Ответ: а) $b \not\subset \alpha$; б) MN – прямая, по которой плоскости α и β пересекаются.

41.

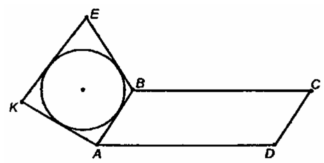
Пусть a и b скрещиваются.

Предположим, $a \parallel c$ и $b \parallel c$, тогда $a \parallel b$, но a и b – скрещиваются.

Предположение неверно. Значит, это невозможно.



42.



$KE \parallel AB$, $AB \parallel CD \Rightarrow KE \parallel CD$ (теорема п. 5).

У четырехугольника, в который можно вписать окружность, суммы длин противоположных сторон равны.

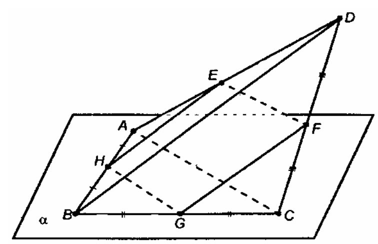
$P_{ABEK} = 2 \cdot (KE + AB) = 2 \cdot (22{,}5 + 27{,}5) = 2 \cdot 50 = 100$.

43.

Соединим все вершины пространственного четырехугольника.

HE – средняя линия ΔBAD, $HE \parallel BD$; GF – средняя линия ΔBCD, $GF \parallel BD$.

Значит, $HE \parallel GF$.

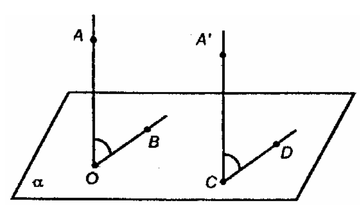


GH – средняя линия ΔABC, $GH \parallel AC$;

EF – средняя линия ΔADC, $EF \parallel AC$. Отсюда $EF \parallel GH$.

4-угольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется параллелограммом, следовательно, $EFGH$ – параллелограмм (из параллельности сторон также следует, что четырехугольник плоский).

44.



Проведет $CA' \parallel OA$.

По теореме об углах с сонаправленными сторонами (п. 8) имеем: $\angle AOB = \angle A'CD$ – искомый.

а) $\angle AOB = 40^\circ$.

б) Согласно п. 9, искомый угол равен $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.

в) $\angle AOB = 90^\circ$.

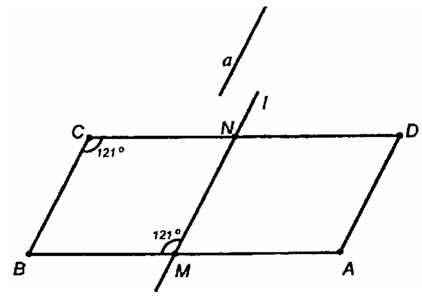
45.

$a \parallel BC$, значит, $a \parallel$ пл. ABC.

CD не параллельна BC, то есть CD скрещивается с a.

а) $\angle B = 50^\circ$.

Угол между a и CD равен углу между BC и CD, значит, острому $\angle B$.

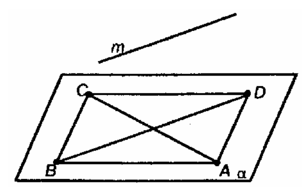


$\angle B = 50^\circ$

б) Если $\angle C = 121^\circ$, значит, согласно п. 9 углом между a и CD будет являться острый угол ADC.

$\angle ADC = 180^\circ - 121^\circ = 59^\circ$.

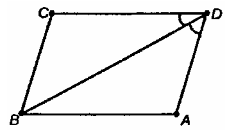
46.



1. $\left.\begin{matrix} m \parallel BD \\ BD \subset \text{пл.}\,\alpha \end{matrix}\right\}$ из теоремы I $m \parallel$ пл. α
2. AC пересекает BD, то есть m и AC скрещиваются.
3. AD пересекает BD, то есть m и AD скрещиваются.
4. Угол между m и AC – равен углу между BD, параллельной m и AC.

Угол между m и AC равен 90° в силу перпендикулярности диагоналей ромба.

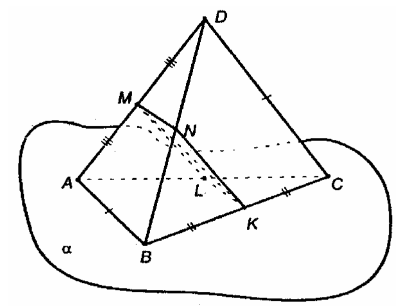
5. Угол между m и AD – равен углу между BD, параллельной m и AD.



BD – биссектриса (т.к. $ABCD$ – ромб).

$\angle BDA = \frac{1}{2}\angle ADC = \frac{1}{2}\cdot 128^\circ = 64^\circ$.

47.



Соединим точки D и B, A и C.

Проведем в пл. α (или пл. ABC) $KL \parallel AB$, в пл. BDC $KN \parallel DC$.

Соединив точки N и M, точки L и M, рассмотрим $MNKL$.

В ΔABC $LK \parallel AB$, $BK = KC$, поэтому LK – средняя линия в ΔABC;

$LK = \frac{1}{2}AB$.

В ΔBDC $KN \parallel DC$, K – середина BC, поэтому KN – средняя линия в ΔBDC.

В ΔADB т. M – середина AD, т. N – середина BD, поэтому MN – средняя линия в ΔADB;

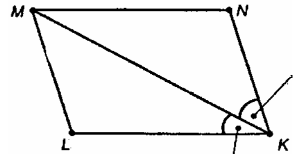
$MN \parallel AB$, $MN = \frac{1}{2}AB$.

В ΔADC $AM = MD$, $AL = LC$, поэтому ML – средняя линия в ΔADC;

$ML = \frac{1}{2}DC$, $ML \parallel DC$.

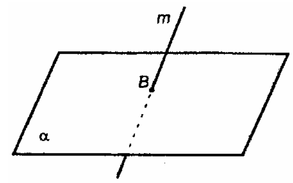
Значит, $LK = MN = \frac{1}{2}DC$.

Из условия, $AB = DC$, значит, $LK = MN = KN = ML$; $ML \parallel NK$ и $MN \parallel LK$. 4-угольник $MNKL$ – ромб, MK – диагональ, а в ромбе и биссектриса. Но углы NKM и LKM – искомые.

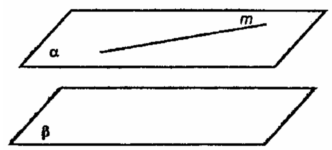


48.

Нет. Если бы такая плоскость существовала, то они имела бы с пл. α общую точку B, то есть не была бы ей параллельна.



50.

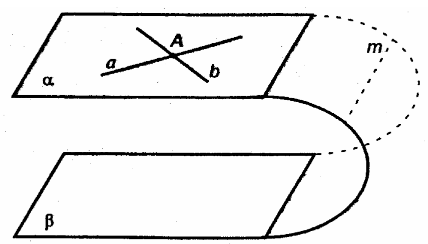


Прямая и плоскость параллельны, если они не имеют общих точек.

$\alpha \parallel \beta$ по условию, то есть у α и β нет общих точек.

$m \subset \alpha$, поэтому и у m с пл. β нет общих точек. То есть $m \parallel \beta$. Утверждение доказано.

51.



Пусть α и β пересекаются, и m – линия их пересечения.

$a \parallel m$ и $b \parallel m$, т.е. лежат в одной пл. α и не пересекаются.

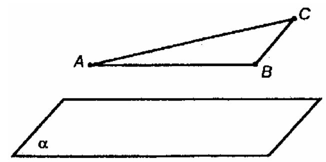
Значит, в пл. α через т. A проходят две прямые, параллельные m, что невозможно по аксиоме из планиметрии.

Предположение неверно, $\alpha \parallel \beta$.

52.

Пусть $BC \parallel \alpha$ и $AB \parallel \alpha$.

Если две пересекающиеся прямые пл. ABC параллельны пл. α, то пл. $ABC \parallel$ пл. α. Поэтому $AC \parallel \alpha$.



53.

Возьмем пару отрезков A_1A_2 и B_1B_2. A_1A_2 и B_1B_2 по следствию из аксиомы A_1 (п. 3, теорема) они лежат в одной плоскости.

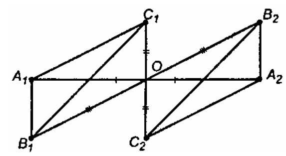
$A_1B_1A_2B_2$ – параллелограмм (диагонали 4-угольника пересекаются и в точке пересечения делятся пополам).

$A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

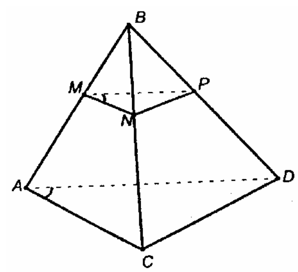
Возьмем вторую пару отрезков A_1C_1 и A_2C_2.

Аналогично получим, что $A_1C_1 \parallel A_2C_2$.

По теореме п. 10 плоскости $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ параллельны.



54.



а) В ΔABC: MN – средняя линия, $MN \parallel AC$, $MN = \dfrac{1}{2}AC$.

В ΔBCD: NP – средняя линия, $NP \parallel CD$, $NP = \dfrac{1}{2}CD$.

По теореме п. 10, плоскости MNP и ACD параллельны.

$\angle NMP = \angle CAD$ – как углы с соответственно параллельными сторонами.

б) $\Delta NMP \sim \Delta CAD$ (из предыд. пункта)

$$S_{\Delta NMP} = \frac{1}{2} MN \cdot NP \cdot \sin\angle NMP,$$

$$S_{\Delta CAD} = \frac{1}{2} CA \cdot AD \cdot \sin\angle CAD,$$

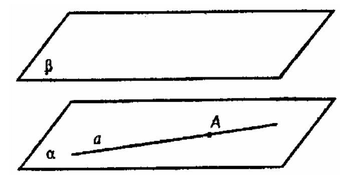
$$\frac{S_{\Delta NMP}}{S_{\Delta CAD}} = \frac{\frac{1}{2} MN \cdot MP \cdot \sin\angle NMP}{\frac{1}{2} CA \cdot AD \cdot \sin\angle CAD} = \frac{MN \cdot MP}{CA \cdot AD} = \frac{\frac{1}{2} CA \cdot \frac{1}{2} AD}{CA \cdot AD} = \frac{1}{4},$$

$S_{\Delta NMP} = 12.$

55.

Решение приведено в учебнике.

56.



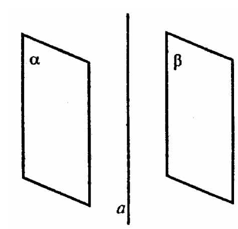
Пусть $a \parallel \beta$, $A \in \alpha$, $A \in a$. Докажем, что $a \subset \alpha$.

Мы знаем, что если некоторая прямая a пересекает плоскость α, то она пересекает также любую плоскость, параллельную α.

Если a не параллельна пл. β, то она пересекала бы пл. β, а, значит, и плоскость α, а по условию $a \parallel \beta$.

Значит, a не может пересекать пл. α и, раз она имеет с пл. α общую точку A, то $a \subset \alpha$.

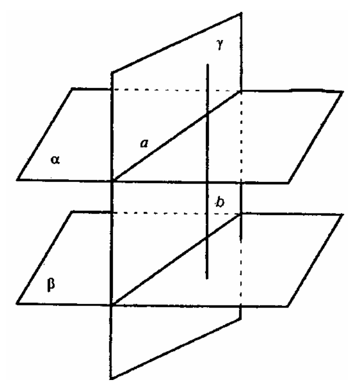
57.



$A \parallel \alpha$, $a \parallel \beta$.

Пусть a не параллельна пл. β, тогда она пересекает пл. β, а, значит, пересекает пл. α, но по условию $a \parallel \alpha$. Значит, предположение неверно, a не пересекает пл. β, то есть или $a \parallel \beta$, или $a \subset \beta$.

58.



Пусть $\alpha \parallel \beta$, но пересекается с γ. Докажем, что β пересекается с γ.

Пусть γ пересекает α по прямой a.

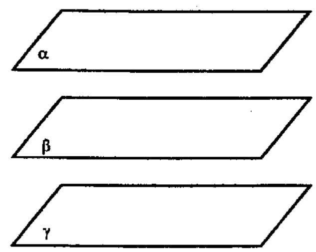
В пл. γ проведем прямую b, пересекающую a.

$\left.\begin{array}{l} b \text{ пересекает } \alpha \\ \alpha \parallel \beta \end{array}\right\} \to b$ пересекает β, но $b \subset \gamma$, следовательно, γ пересекает β.

59.

Решение приведено в учебнике.

60.

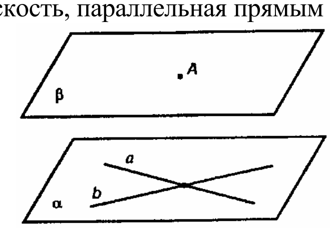


Если α не параллельна β, то α пересекает β. Но если плоскость пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую плоскость; поэтому, α пересекает γ, а $\gamma \parallel \beta$. Противоречие.

Значит, предположение неверно, $\alpha \parallel \beta$.

61.

A проходит плоскость, параллельная прямым a и b, и только одна.



a и b пересекаются по условию, следовательно, по следствию из аксиомы A_1, эти прямые единственным образом определяют плоскость α.

Известно, что через точку $A \notin \alpha$ проходит единственная плоскость, параллельная α, то есть параллельная a и b.

62.

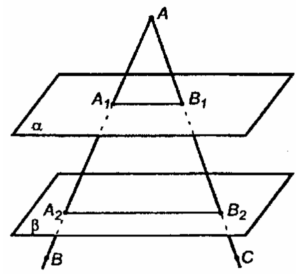
Инструмент надо регулировать в двух измерениях.

Если установить уровни на параллельных прямых, то можно регулировать только наклон прибора, но установить диск со шкалой параллельно поверхности не получится: если прибор слегка наклонится вперед или назад, то вещество в уровнях никуда не сместится и, значит, нарушение параллельности плоскости диска уровни не покажут.

63.

а) AA_2 и AB_2, если $A_1A_2 = 2A_1A$, $A_1A_2 = 12$ см, $AB_1 = 5$ см;

б) A_2B_2 и AA_2, если $A_1B_1 = 18$ см, $AA_1 = 24$ см, $AA_2 = \frac{3}{2} A_1A_2$.

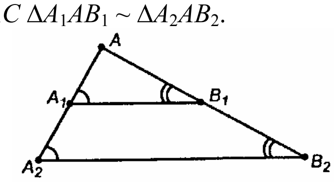


$\alpha \parallel \beta$.

Плоскость BAC пересекает пл. α и β.

По свойству параллельных плоскостей, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ (п. 11,1°).

В плоскости BAC $\Delta A_1AB_1 \sim \Delta A_2AB_2$.



а) $A_1A_2 = 2 \cdot A_1A = 12$ см, $AB_1 = 5$ см.

$\frac{A_1A}{A_2A} = \frac{AB_1}{AB_2}$; $A_1A = \frac{1}{2} \cdot A_1A_2 = 6$ (см);

$AA_2 = AA_1 + A_1A_2 = 6 + 12 = 18$ (см);

$\frac{6}{18} = \frac{5}{AB_2}$, $AB_2 = 15$ (см). Итак, $AA_2 = 18$ см, $AB_2 = 15$ см.

б) $A_1B_1 = 18$ см, $AA_1 = 24$ см, $AA_2 = \frac{3}{2} A_1A_2$.

$\frac{A_1A}{A_2A} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{AB_1}{AB_2}$, $\frac{24}{AA_2} = \frac{18}{A_2B_2}$;

$AA_2 = AA_1 + A_1A_2 = 24 + A_1A_2$,

$AA_2 = 24 + \frac{2 \cdot AA_2}{3}$; $\frac{1}{3} AA_2 = 24$,

$AA_2 = 72$ (см); $\frac{24}{72} = \frac{18}{A_2B_2}$, $\frac{1}{3} = \frac{18}{A_2B_2}$, $A_2B_2 = 54$ (см).

Итак, $A_2B_2 = 54$ (см), $AA_2 = 72$ (см).

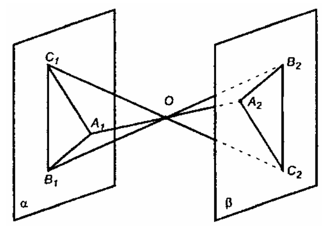
Ответ: а) AA_2=18 см, AB_2 = 15 см; б) A_2B_2=54 (см), AA_2=72 см.

64.

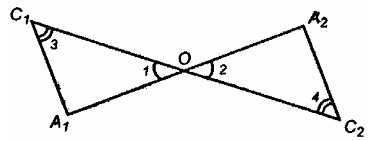
Две пересекающиеся прямые единственным образом задают плоскость.

Прямые A_1A_2 и B_1B_2 пересекаются и задают плоскость $A_1B_1B_2$.

По свойству параллельных плоскостей (п. 11, 1°), $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

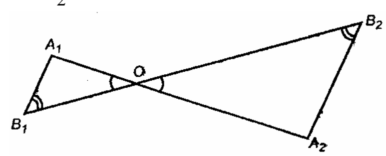


Аналогично: $A_1C_1 \parallel A_2C_2$; $B_1C_1 \parallel B_2C_2$;
$\Delta OA_1C_1 \sim \Delta OA_2C_2$



($\angle 1 = \angle 2$ – как вертикальные, $\angle 3 = \angle 4$ как накрест лежащие);

$\dfrac{A_1C_1}{A_2C_2} = \dfrac{OA_1}{OA_2} = \dfrac{OC_1}{OC_2}$; $\Delta OA_1B_1 \sim \Delta OA_2B_2$;



$\dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} = \dfrac{OA_1}{OA_2} = \dfrac{OB_1}{OB_2}$; $\Delta OB_1C_1 \sim \Delta OB_2C_2$; $\dfrac{B_1C_1}{B_2C_2} = \dfrac{OB_1}{OB_2} = \dfrac{OC_1}{OC_2}$

Учитывая полученные соотношения, получим

$\dfrac{A_1C_1}{A_2C_2} = \dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} = \dfrac{B_1C_1}{B_2C_2}$.

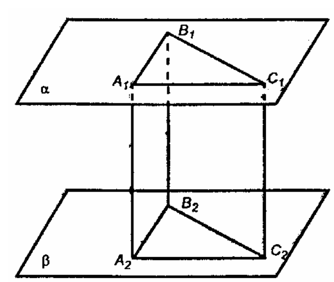
Значит, $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$ по третьему признаку подобия (пропорциональность сторон).

65.

По свойству 2° п. 11 $A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2$.

Если в 4-угольнике противоположные стороны равны и параллельны, то 4-угольник – параллелограмм.

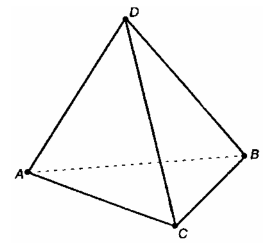
$A_1B_1B_2A_2$, $B_1C_1C_2B_2$, $A_1C_1C_2A_2$ – параллелограммы.



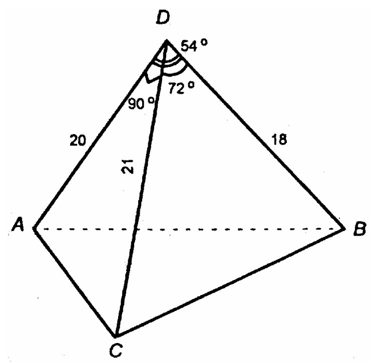
В параллелограммах: $B_1C_1 = B_2C_2$, $A_1B_1 = A_2B_2$, $A_1C_1 = A_2C_2$. Значит, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2B_2C_2$ по трем сторонам.

66.

В тетраэдре три пары скрещивающихся ребер:
AC и DB; AB и DC, AD и CB.



67.



Рассмотрим грань ABD

Из теоремы косинусов:

$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2 \cdot \mathrm{AD} \cdot \mathrm{BD} \cdot \cos 54^\circ \approx 400 + 324 - 2 \cdot 20 \cdot 18 \cdot$
$\cdot\ 0{,}05878 = 724 - 720 \cdot 0{,}5878 \approx 300{,}784;$

$AB \approx \sqrt{300{,}784} \approx 17{,}343 \approx 17$ (см).

По теореме Пифагора $AC^2 = AD^2 + CD^2$;

$AC = \sqrt{400+441} = \sqrt{841} = 29$ (см).

$CB^2 = CD^2 + DB^2 - 2 \cdot \mathrm{DC} \cdot \mathrm{BD} \cdot \cos 72^\circ$;

$CB^2 = 441 + 324 - 2 \cdot 21 \cdot 18 \cdot 0{,}3090 = 765 - 233{,}603 = 531{,}396$;

$CB = \sqrt{531{,}396} \approx 23$ (см).

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 = 210 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_{ADB} = \frac{1}{2} AD \cdot DB \cdot \sin 54^\circ \approx \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 18 \cdot 0{,}8090 = 180 \cdot 0{,}8090 = 145{,}62 \approx$$

≈ 146 (см^2).

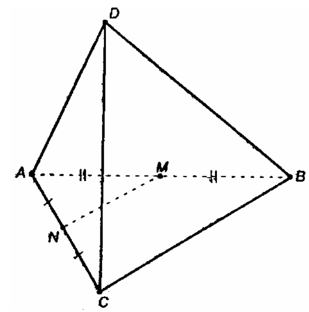
$$S_{DBC} = \frac{1}{2} DC \cdot DB \cdot \sin 72^{\circ} \approx \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 18 \cdot 0{,}9511 = 189 \cdot 0{,}9511 = 179{,}75 \approx$$

≈ 180 (см^2).

Итого: а) ≈ 17 см, ≈ 23 см, 29 см; б) 210 см^2, ≈ 146 см^2, ≈ 180 см^2.

68.

MN параллельна прямой, лежащей в пл. BCD (прямой BC), поэтому она параллельна всей плоскости.



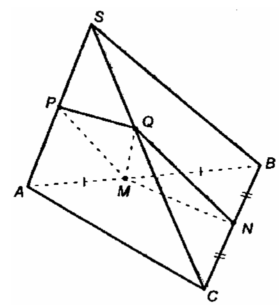
69.

Плоскость SBC и плоскость, проходящая через прямую MN параллельно ребру SB, пересекаются по прямой, проходящей через точку N.

По теореме II линия пересечения параллельна SB.

В плоскость SBC через т. N проходит $NQ \parallel SB$.

Плоскость SAB и плоскость MNQ пересекаются по прямой, проходящей через т. M (прямая MP).



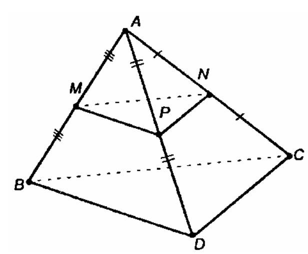
По теореме II линия пересечения параллельна SB.

$$\left.\begin{matrix} PM \parallel SB \\ NQ \parallel SB \end{matrix}\right\} \rightarrow PM \parallel NQ.$$

Утверждение доказано.

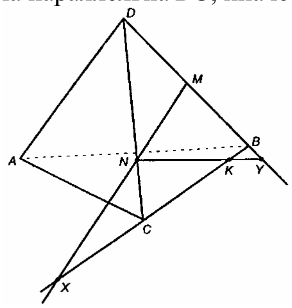
70.

MP, MN – средние линии в ΔABD и ΔABC, значит, $MP \parallel BD$ и $MN \parallel BC$. По теореме п. 10 пл. $MNP \parallel$ пл. BCD.



71.

а) Точки M, N, B, $C \in$ пл. DBC. M и N выберем так, чтобы MN не была параллельна BC, иначе не будет пересечения с ABC.



Построение

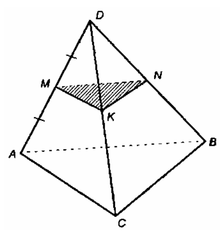
Продолжим отрезки MN и BC до пересечения их в точке X. Точка X – искомая.

б) KN в некоторой точке пересечет DB, $BD \subset$ пл. ABD, значит, KN пересечет в этой точке пл. ABD.

Построение

Продолжим отрезки KN и DB до пересечения их в точке Y. Точка Y – искомая.

72.



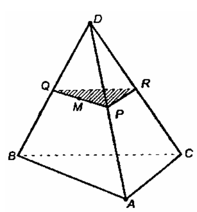
Построение

Способ построения сечения:

проводим $MK \parallel AC$ и $MN \parallel AB$;

соединяем т. K и т. N.

По признаку параллельности плоскостей пл. $MNK \parallel$ пл. ABC.



Построение

Раз сечение параллельно пл. ABC, то плоскость сечения параллельна AB, BC, AC.

Секущая плоскость пересечет боковые грани тетраэдра по прямым, параллельным сторонам ΔABC. Отсюда способ построения сечения.

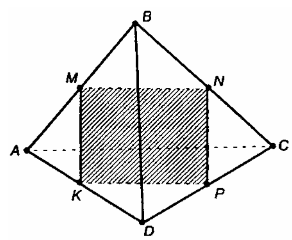
а) через т. M проводим $PQ \parallel BA$;

б) через т. P проводим $PR \parallel AC$;

в) соединим т. Q и т. R;

г) ΔPQR – искомое сечение.

73.



Найдем точки пересечения пл. MNP с ребрами тетраэдра.

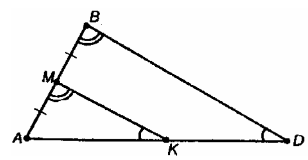
NP – средняя линия ΔDBC, $NP \parallel BD$.

$BD \subset$ пл. ABD, поэтому $NP \parallel$ пл. ABD (теорема I).

Плоскости ABD и MNP имеют общую точку M, значит они пересекаются по прямой, проходящей через т. M в пл. ABD.

Эта прямая параллельна NP, а раз $NP \parallel BD$, то эта прямая параллельна BD.

Пусть K – точка пересечения этой прямой с ребром AD (раз BD пересекает AD, тогда прямая, параллельная BD пересечет AD).



$\Delta MAK \sim \Delta BAD$;

$\frac{AK}{AD} = \frac{MA}{BA} = \frac{MK}{BD}$;

$\frac{1}{2} = \frac{MK}{BD} = \frac{AK}{AD}$, поэтому точка K – середина AD.

Утверждение доказано.

Аналогично получаем, что PK – средняя линия в ΔADC, поэтому $PK \parallel AC$.

$$\left.\begin{matrix} NP \parallel BD \\ ML \parallel BD \end{matrix}\right\} \to MK \parallel BD \parallel NP;$$

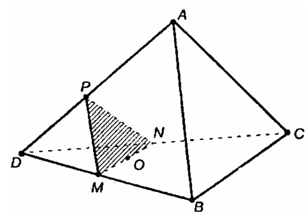
$$\left.\begin{matrix} MN \parallel AC \\ PK \parallel AC \end{matrix}\right\} \to MN \parallel AC \parallel PK.$$

4-угольник $MNPK$ – параллелограмм по определению.

$$P_{MNPK} = 2 \cdot (PK + MK) = 2\left(\frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BD\right) = AC + BD;$$

$P_{MNPK} = 22$ см.

74.



Пусть т. O – точка пересечения медиан ΔBCD.

Плоскость сечения имеет с гранью ADC общую т. N, значит, обе плоскости пересекаются по прямой, проходящей через т. N.

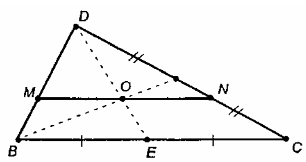
Плоскость сечения и параллельная ей пл. ABC пересекаются плоскостью ADC, значит линии пересечения параллельны, $NP \parallel AC$.

Аналогично, $PM \parallel AB$, $MN \parallel BC$.

$\angle MNP = \angle BAC$, $\angle MNP = \angle BCA$, $\Delta MNP \sim \Delta BAC$ (по первому признаку).

Утверждение а) доказано.

б)



$MO = \frac{2}{3}BE$, $NO = \frac{2}{3}EC$, потому что: $\Delta MDO \sim \Delta BDE$ и $\Delta NDO \sim \Delta CDE$.

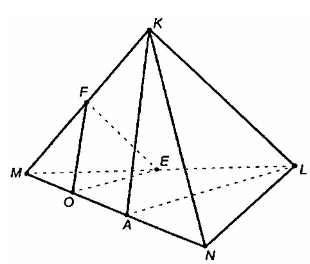
$\frac{MO}{BE} = \frac{DO}{DE}$; $\frac{MO}{BE} = \frac{2}{3}$.

$MN = MO + ON = \frac{2}{3}BC$.

Отношение площадей подобных фигур равно отношению квадратов соответствующих линейных размеров.

$\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{MN^2}{BC^2}$; $\frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{4}{9}$.

75.



а) Проведем AK и AL. ΔAKL – искомое сечение.

б) В ΔAMK: OF – средняя линия, $OF \parallel AK$;

в ΔMLK: EF – средняя линия, $EF \parallel KL$.

По теореме п. 10 пл. $OFE \parallel$ пл. AKL.

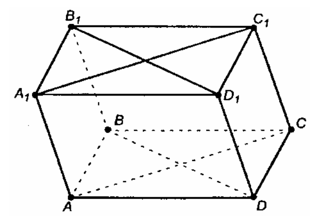
Площади подобных треугольников $\angle OFE = \angle AKL$ как углы с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами; $OF = \frac{1}{2}AK, FE = \frac{1}{2}KL$, поэтому $\Delta OFE \sim \Delta AKL$ относятся как квадраты, значит, соответствующих линейных размеров.

$$\frac{S_{LKA}}{S_{EOF}} = \left(\frac{LA}{EO}\right)^2 = \left(\frac{LA}{\frac{1}{2}LA}\right)^2 = 4.$$

$S_{EOF} = 6$ (см^2).

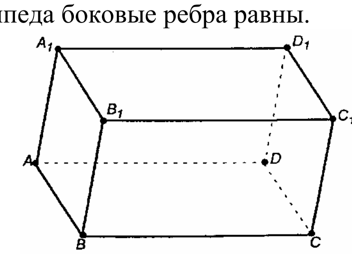
76.

В силу свойств параллелепипеда AA_1C_1C – параллелограмм, отсюда $A_1C_1 \parallel AC$; B_1D_1BD – параллелограмм, поэтому $B_1D_1 \parallel BD$.



77.

У параллелепипеда боковые ребра равны.



$\frac{AB}{BC} = \frac{4}{5}, \frac{BC}{BB_1} = \frac{5}{6}$. Пусть $BB_1 = x$, тогда $BC = \frac{5}{6}x$,

$AB = \frac{4}{5}BC = \frac{4}{5}\left(\frac{5}{6}x\right) = \frac{2}{3}x.$

Из условия задачи:

$4 \cdot AB + 4 \cdot BC + 4 \cdot BB_1 = 120$, или $AB + BC + BB_1 = 30$;

$\frac{2}{3}x+\frac{5}{6}x+x=30$; $4x + 5x + 6x = 180$;

$15x = 180$, $x = 12$ (см).

$BB_1 = 12$ см; $AB=\frac{2}{3}\cdot 12=8$ (см), $BC=\frac{5}{6}\cdot 12=10$ (см).

Ответ: 12, 8, 10 см.

78.

$ABCD$ – параллелограмм по условию, $AB = CD$.

$AB – AM = CD – CN$, то есть $BM = DN$.

Но $\left.\begin{matrix} BM \parallel DN \\ BM = DN \end{matrix}\right\} \rightarrow$ по признаку параллелограмма,

$MBND$ – параллелограмм.

Аналогично получим, что $N_1B_1M_1D_1$ – параллелограмм.

$\angle NDM = \angle N_1D_1M_1$ – как углы с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами.

Параллелограммы $MBND$ и $M_1B_1N_1D_1$ равны, так как равны их соответствующие стороны ($MB = M_1B_1$, $M_1D_1 = MD$) и угол между ними (п. 5).

$A_1M_1 = AM$, поэтому A_1M_1MA – параллелограмм, $M_1M \parallel A_1A \parallel B_1B$.

Аналогично, C_1NN_1C – параллелограмм, $C_1C \parallel NN_1 \parallel DD_1$.

Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны, поэтому

$MM_1 = BB_1 = CC_1 = NN_1 = DD_1$.

По признаку параллелограмма 4-угольники MBB_1M_1, BNN_1B_1, DNN_1D_1 и MDD_1M_1 – параллелограммы.

По определению (п. 13) $MBNDM_1B_1N_1D_1$ – параллелепипед.

79.

а) Сечение плоскостью ABC_1.

Пл. $BB_1C_1C \parallel$ пл. AA_1D_1D по свойству параллелепипеда, отсюда $BC_1 \parallel$ пл. AA_1D_1D.

Точка A общая для плоскостей ABC_1 и AA_1D_1D – плоскости пересекаются по прямой, проходящей через т. A и параллельной BC_1 (п. 11.1°), очевидно, это AD.

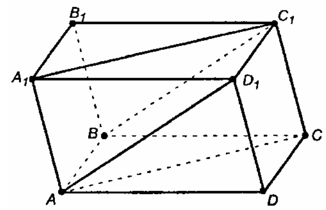
Искомое сечение – четырехугольник ABC_1D_1.

$\begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases}$ (т.к. $ABCD$ – параллелограмм),

$\begin{cases} CD \parallel C_1D_1 \\ CD = C_1D_1 \end{cases}$ (т.к. CDD_1C_1 – параллелограмм).

Отсюда $AB \parallel C_1D_1$ и $AB = C_1D_1$.

Значит, ABC_1D_1 – параллелограмм, т.к. его противоположные стороны параллельны и равны.



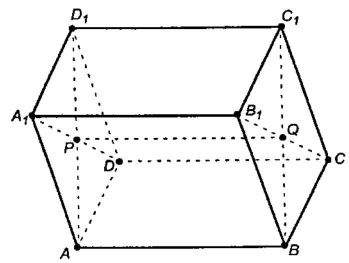
б) Сечение плоскостью ACC_1.

Плоскости граней B_1C_1CB и A_1D_1DA пересечены плоскостью A_1C_1CA, линии пересечения параллельны, $AA_1 \parallel CC_1$.

$AA_1 = CC_1$ (п. 11, 2°).

$\left.\begin{matrix} AA_1 \parallel CC_1 \\ AA_1 = CC_1 \end{matrix}\right\}$ по признаку параллелограмма, AA_1C_1C – параллелограмм.

80.



а) Сечение плоскостью ABC_1.

Пл. $BB_1C_1C \parallel$ пл. AA_1D_1D по свойству параллелепипеда, отсюда $BC_1 \parallel AA_1D_1D$.

Тогда A – общая для плоскостей ABC_1 и AA_1D_1D – плоскости пересекаются по прямой, проходящей через т. A и параллельной BC_1 (п. 11, 1°).

Плоскости граней AA_1B_1B и DD_1C_1C пересечены плоскостью ABC_1D_1, значит, их линии пересечения параллельны, $AB \parallel C_1D_1$.

Вывод: плоскость пересекает грань AA_1D_1D по прямой AD_1; $AD_1 \parallel BC_1$.

Искомое сечение ABC_1D параллелограмм по определению.

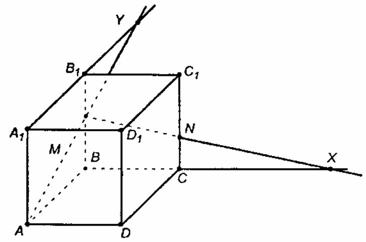
б) Сечение плоскостью DCB_1.

Точка D – общая для плоскостей DCB_1 и AA_1D_1D – плоскости пересекаются по прямой, проходящей через т. D и параллельной прямой CB_1 (п. 11, 1°). В пл. грани AA_1D_1D проводим такую прямую. Это будет DA_1 (4-угольник DCB_1A_1 – параллелограмм, поэтому $DA_1 \parallel CB_1$).

Искомое сечение DCB_1A_1.

в) PQ – отрезок, по которому пересекаются построенные сечения ($P \in$ плоскостям сечений и $Q \in$ плоскостям сечений, PQ – линия пересечения плоскостей), где P и Q – центры граней AA_1D_1D и BB_1C_1C.

81.



а) Пусть MN не параллельна BC, тогда MN пересечет пл. ABC.

Построение

Продолжим отрезки BC и MN до пересечения в точке X.

Тогда X – искомая.

б) AM не параллельна A_1B_1, AM пересечет A_1B_1,

$A_1B_1 \subset$ пл. $A_1B_1C_1$.

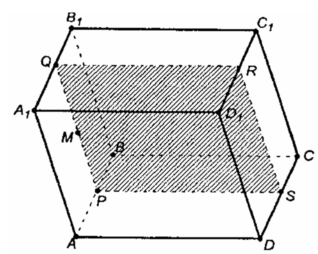
Построение

Продолжим отрезки A_1B_1 и AM до пересечения в точке Y.

Точка Y – искомая.

82.

а)



Построение

Плоскость сечения по условию || пл. $ABCD$, следовательно, она пересекает грани параллелепипеда по прямым, параллельным AB, DC, BC и AD (это следует из теоремы II). Отсюда способ построения:

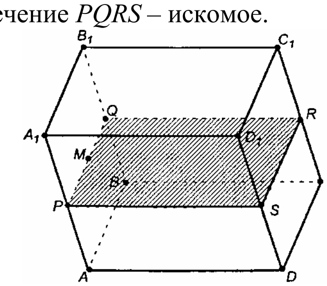
1. через т. M проводим $PQ \parallel AB$;
2. через т. Q проводим $QR \parallel BC$;
3. через т. P проводим $PS \parallel AD$;
4. соединим точки S и R;

$PQSR$ – искомое.

б)

По теореме II, плоскость сечения пересечет боковые грани по прямым, параллельным AA_1 и DD_1, а плоскости оснований – по прямым, параллельным A_1D_1 и AD. Отсюда:

1. через т. M проводим $PQ \parallel AA_1$;
2. через т. Q проводим $QR \parallel A_1D_1$ и через т. P проводим $PS \parallel AD$;
3. соединим точки R и S;
4. сечение $PQRS$ – искомое.

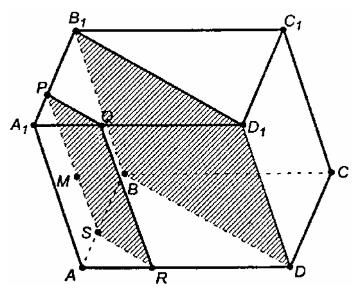


в)

1) Построим плоскость BDD_1; она пересечет плоскости верхнего и нижнего основания по параллельным прямым. $BD \parallel B_1D_1$ (соединив B_1 и D_1, получим параллелограмм BB_1D_1D).

2) Плоскость сечения по условию параллельна пл. BB_1D_1D, значит, она параллельна BB_1D_1D.

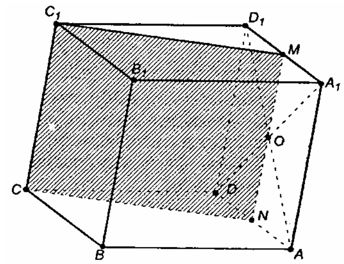
По теореме II получим, что если плоскость боковой грани AA_1B_1B проходит через прямую BB_1, а BB_1 параллельна плоскости сечения и пересекает плоскость сечения, то линия пересечения боковой грани с сечением параллельна прямой B_1B, получим построение:



1. через т. M проводим $PS \parallel B_1B$;
2. через т. P проводим $PQ \parallel B_1D_1$;
3. через т. S проводим $SR \parallel BD$;
4. соединим т. Q и т. R;
5. сечение $PQRS$ – искомое сечение.

83.

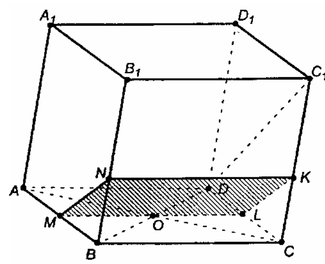
а)



Построение

Через т. O проведем $MN \parallel D_1D$ ($MN \parallel D_1D$, $CC_1 \parallel DD_1$, поэтому $CC_1 \parallel MN$); соединим M с C_1 и N с C. сечение MC_1CN – искомое.

б)



Построение:

через т. O проводим $ML \parallel AB$;

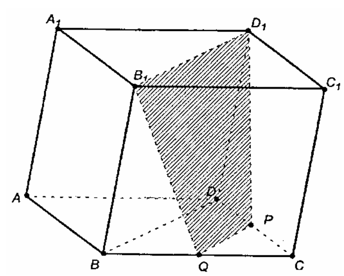
через т. M проводим $MN \parallel A_1B_1$;

через т. N проводим $NK \parallel B_1C_1$;

соединим точки K и L;

сечение $MNKL$ – искомое сечение.

84.



Т. P – середина ребра CD.

По теореме II, плоскость сечение пересечет основания $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ по параллельным прямым.

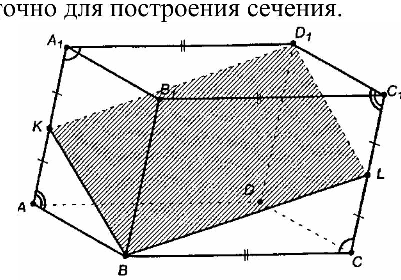
Проведем BD; $BD \parallel B_1D_1$. Из точки P проводим $PQ \parallel BD$. Поэтому $PQ \parallel B_1D_1$. Соединим точки B_1 и Q; D_1 и P. Сечение B_1D_1Q – искомое.

В 4-угольнике B_1D_1PQ имеем $B_1D \parallel PQ$, значит, B_1D_1PQ – трапеция (по определению).

85.

По теореме II, плоскость BKL пересечет противоположные боковые грани по параллельным отрезкам. Противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны.

Этого достаточно для построения сечения.



Соединим т. K с т. B_1; точку L с т. D_1.

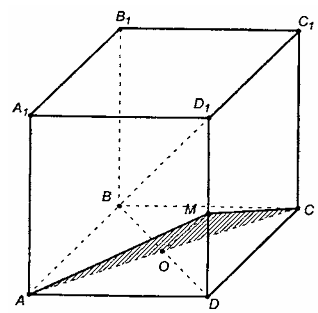
$$\left.\begin{aligned} &A_1K = LC \\ &A_1D_1 = BC \\ &\angle KA_1D_1 = \angle LCB \end{aligned}\right\} \Delta KA_1D_1 = \Delta LCB, \text{ следовательно, } KD_1 = LB.$$

Аналогично, $\Delta KAB = \Delta LC_1D_1$, следовательно $D_1L = BK$.

В 4-угольнике BKD_1L $KB = LD_1$ и $KD_1 = BL$.

Этот 4-угольник является параллелограммом, а сам 4-угольник – искомое сечение.

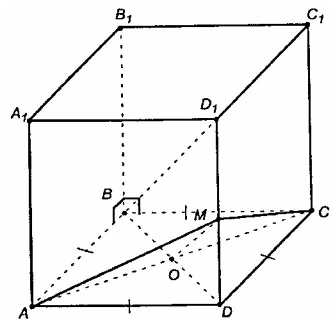
86.



Плоскость сечения параллельна BD_1, если она проходит через прямую, параллельную BD_1 (теорема I). В плоскости BD_1D проводим $OM \parallel D_1B$; проводим отрезки AM и CM.

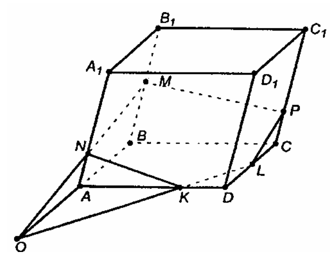
$AMC \parallel BD_1$ по построению, значит, AMC – искомое сечение.

Если основание – ромб и $\angle ABB_1 = \angle CBB_1 = 90^\circ$, $AD = DC$, то ΔADM и ΔDMC – прямоугольные. MD – общий катет. $\Delta DMA = \Delta DMC$, таким образом $MA = MC$. В ΔAMC $MA = MC$, значит, ΔAMC – равнобедренный.



87.

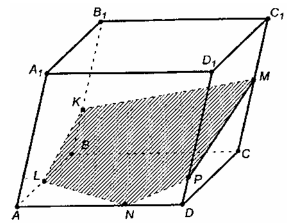
а)



Построение

1. Допустим, что MN не параллельна AB.
2. Продолжим MN и AB до пересечения их в т. O.
3. $OK \subset$ пл. ABC (т.к. $O \in ABC$ и $K \in ABC$).
4. Соединим точки K и N.
5. Плоскости ONK и OAK (то есть пл. ABC) пересекаются по прямой OK.
6. Поэтому продолжим OK до пересечения с DC в т. L. Соединим точки K и L – ведь они лежат в одной плоскости.
7. Противоположные грани AA_1B_1B и DD_1C_1C секущая плоскость пересечет по параллельным прямым (по теореме II), поэтому в плоскости DD_1C_1C проведем $LP \parallel NM$.
8. Соединим т. P и т. M.
9. $MNKLP$ – искомое сечение.

б)



Построение

1. Соединим т. K с т. M.
2. Точка $N \in$ грани AA_1D_1D и секущей плоскости.
3. Секущая плоскость, проходя через т. N, пересечет параллельные грани AA_1D_1D и BB_1C_1C по параллельным прямым; поэтому в пл. AA_1D_1D проводим $NP \parallel KM$.
4. Проводим PM.
5. Секущая плоскость проходит через т. K и пересекает противоположные грани AA_1B_1B и DD_1C_1C по параллельным прямым; поэтому в пл. грани AA_1B_1B проводим $KL \parallel MP$.
6. Соединим т. L и т. N.
7. $KLNPM$ – искомое сечение.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ I

1. Верно ли утверждение: если две прямые не имеют общих точек, то они параллельны?

Нет. Параллельные прямые должны еще и лежать в одной плоскости.

2. Точка M не лежит на прямой a. Сколько прямых, не пересекающих прямую a, проходит через точку M? Сколько из этих прямых параллельны прямой a?

а) Бесконечное несчетное множество;

б) одна (п. 3, теорема).

3. Прямые a и c параллельны, а прямые a и b пересекаются. Могут ли прямые b и c быть параллельными?

Ответ: нет, иначе через точку пересечения a и b проходило бы две прямые, параллельные c.

4. Прямая a параллельна плоскости α. Верно ли, что эта прямая: а) не пересекает ни одну прямую, лежащую в плоскости α; б) параллельна любой прямой, лежащей в плоскости α; в) параллельна некоторой прямой, лежащей в плоскости α?

а) Да; б) нет; в) да.

5. Прямая *a* параллельна плоскости α. Сколько прямых, лежащих в плоскости α, параллельны прямой *a*? Параллельны ли друг другу эти прямые, лежащие в плоскости α?

а) Бесконечное множество;

б) да.

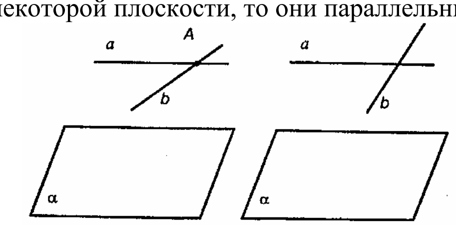
6. Прямая *a* пересекает плоскость α. Лежит ли в плоскости α хоть одна прямая, параллельная *a*?

Нет.

7. Одна из двух параллельных прямых параллельна некоторой плоскости. Верно ли утверждение, что и вторая прямая параллельна этой плоскости?

Нет. Вторая прямая может лежать в этой плоскости. По определению, если прямая параллельна плоскости, то они не должны иметь общих точек.

8. Верно ли утверждение: если две прямые параллельны некоторой плоскости, то они параллельны друг другу?



Нет (прямые могут пересекаться или скрещиваться).

9. Две прямые параллельны некоторой плоскости. Могут ли эти прямые: а) пересекаться; б) быть скрещивающимися?

а) Да (см. предыдущую задачу);

б) да (см. предыдущую задачу).

10. Могут ли скрещивающиеся прямые *a* и *b* быть параллельными прямой *c*?

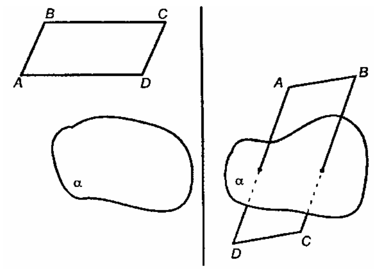
По отдельности – да, вместе нет (если так, то $a \parallel b$, а они, по условию, скрещивающиеся).

11. Боковые стороны трапеции параллельны плоскости α. Параллельны ли плоскость α и плоскость трапеции?

Да. Боковые стороны пересекаются, а через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Раз каждая боковая сторона параллельна пл. α, то и плоскость трапеции будет параллельна пл. α (по известному признаку).

12. Две стороны параллелограмма параллельны плоскости α. Параллельны ли плоскость α и плоскость параллелограмма?

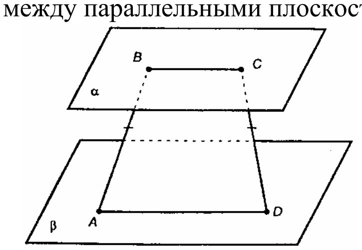


Да.

$AB \parallel \alpha$; $DC \parallel \alpha$, но пл. $ABCD$ не параллельна α.

Ответ: Не обязательно (возможны оба случая).

13. Могут ли быть равны два непараллельных отрезка, заключенные между параллельными плоскостями?



Да. Например, здесь $ABCD$ – равнобедренная трапеция.

14. Существует ли тетраэдр, у которого пять углов граней прямые?

Нет, так как граней всего 4, они являются треугольниками, а треугольника с двумя прямыми углами (это – по счету 5-й угол) не существует.

15. Существует ли параллелепипед, у которого: а) только одна грань – прямоугольник; б) только две смежные грани – ромбы; в) все углы граней острые; г) все углы граней прямые; д) число всех острых углов граней не равно числу всех тупых углов граней?

а) Нет (противоположные грани – равны);

б) нет (по той же причине);

в) нет (таких параллелограммов не существует);

г) да (прямоугольный параллелепипед);

д) нет (в каждой грани два острых и два тупых угла), либо все прямые.

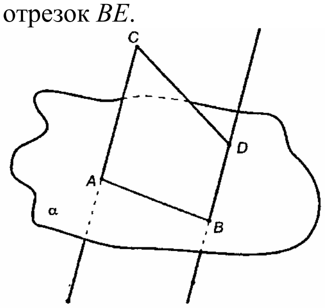
16. Какие многоугольники могут получиться в сечении: а) тетраэдра; б) параллелепипеда?

а) Треугольники и 4-угольники; б) 3-, 4-, 5-, 6-угольники.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ I

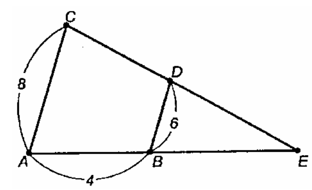
88.

а) Докажите, что прямая CD пересекает плоскость α в некоторой точке E. б) Найдите отрезок BE.



$ABCD$ – трапеция, CD пересекается с AB, $AB \subset \alpha$, потому CD пересечет в некоторой т. E.

Рассмотрим плоскость трапеции.



$\Delta AEC \sim \Delta BED$;

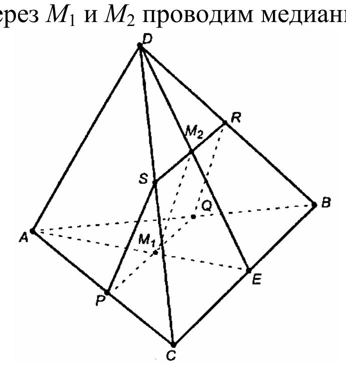
$$\frac{AE}{BE} = \frac{EC}{ED} = \frac{AC}{DB};$$

$$\frac{AB + BE}{BE} = \frac{AC}{DB}; \frac{AB}{BE} + 1 = \frac{8}{6};$$

$$\frac{AB}{BE} = \frac{1}{3};\ BE = 12 \text{ (см)}.$$

89.

1. Через M_1 и M_2 проводим медианы AE и DE.



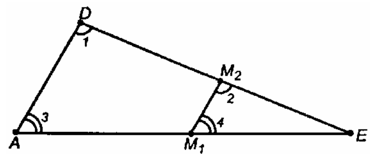
2. $DM_2 = \frac{2}{3} DE,\ AM_1 = \frac{2}{3} AE$.

3. Проверим, будет ли $\Delta AED \sim \Delta M_1EM_2$. $\angle E$ у них общий;

$\dfrac{AE}{\frac{1}{3}AE} = \dfrac{DE}{\frac{1}{3}DE}$ – тождество, значит, соответствующие стороны пропорциональны, поэтому $\Delta AED \sim \Delta M_1EM_2$.

4. Из подобия треугольников следует, что $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$.

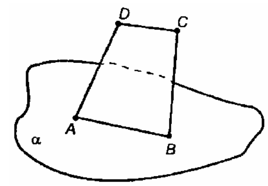
5. Если соответственные углы равны, то прямые параллельны:



$AD \parallel M_1M_2$.

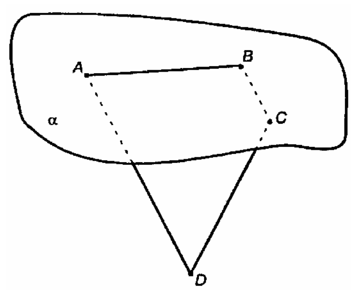
90.

а)



Раз $AB \subset \alpha$ и $DC \parallel AB$, то $CD \parallel \alpha$ (по известной теореме).

б)



CD не параллельна $AB \Rightarrow CD$ пересечет AB, т.е. и плоскость α.

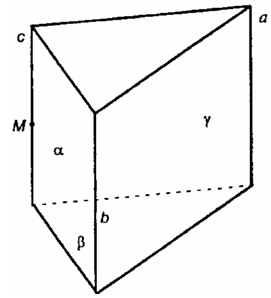
91.

$a \parallel b$

Из аксиомы A_3 (п. 2) следует существование прямой с, проходящей через т. M, параллельной a и b.

α — плоскость, в которой лежат a и c;

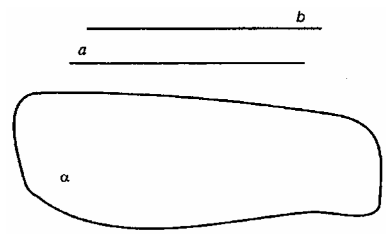
β — плоскость, в которой лежат c и b;



$c \subset \alpha$, $c \subset \beta$, то есть эта прямая и есть прямая пересечения α и β. А по построению она параллельна прямым a и b.

Утверждение доказано.

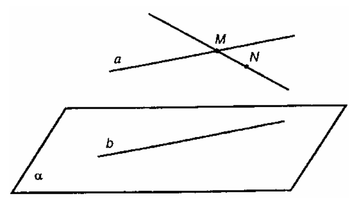
92.



Доказательство дано в п. 6, 2°.

93.

Так как MN не параллельна b и MN не пересекает b, то MN и b скрещиваются.



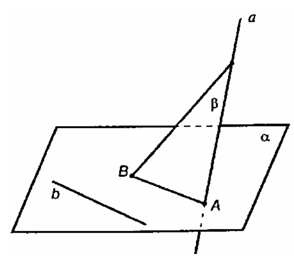
94.

Пусть скрещивающиеся прямые a и b.

Через т. B и b можно провести единственную пл. α - следствие аксиомы A_1. Аналогично через т. B и a.

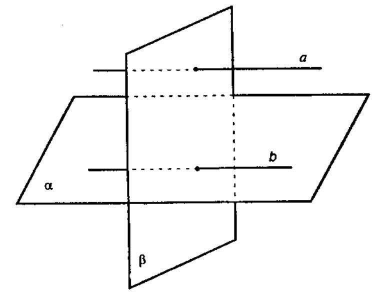
т. B – общая пл. α и пл. β. Плоскости пересекаются.

Ответ: да.

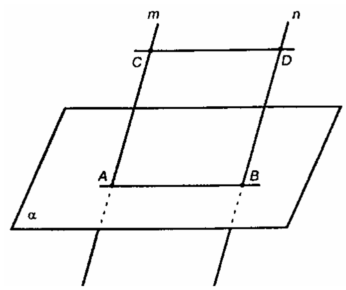


95.

В пл. α всегда найдется прямая $b \parallel a$; раз β пересекается с a, то и b пересекается с β, значит, β пересечется с α.



96.



Соединим точки A и B.

A, B, C, D лежат в одной плоскости, что следует из факта $m \parallel n$.

$AB \parallel CD$ (по известной теореме).

Рассмотрим 4-угольник $ABCD$:

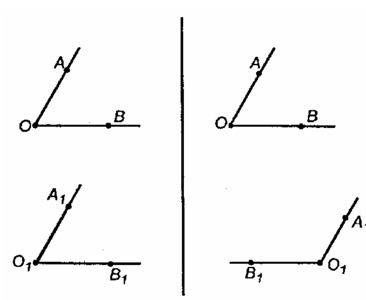
$AC \parallel DB$ – по условию;

$AB \parallel CD$ – по доказанному;

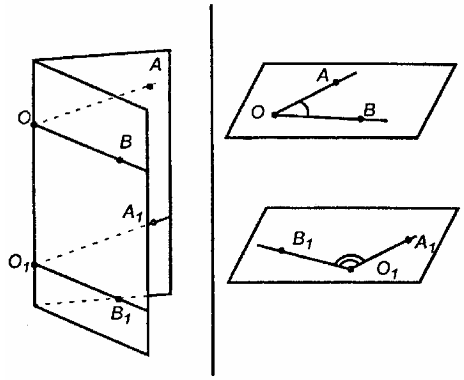
$ABCD$ – параллелограмм.

По свойству параллелограмма $AC = DB$ (как противолежащие стороны).

97.

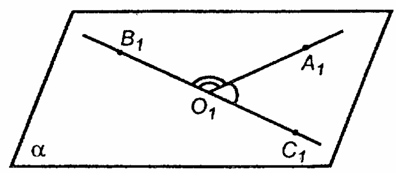


$AO \parallel O_1A_1$ и $OB \parallel O_1B_1$.



Доказательство дано в п. 8

По теореме п. 10 $\alpha \parallel \beta$. В пл. β из т. O проведем $OC_1 \parallel OB$.



$OB \parallel O_1B_1 \parallel O_1C_1$

Согласно теореме п. 4 через т. O_1 может проходить только единственная прямая, параллельная OB. Поэтому, точки B_1, O_1, C_1 лежат на одной прямой B_1C_1.

$\angle B_1O_1C_1 = \angle B_1O_1A_1 + \angle A_1O_1C_1 = 180^\circ$.

98.

Да, существует; такая плоскость только одна.

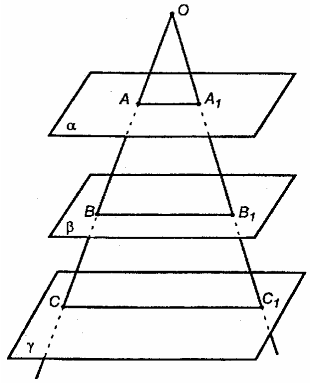
Выберем на прямой $a \parallel \alpha$ произвольную т. A. Тогда через т. A можно провести единственную плоскость, параллельную α (задача 59, решена в учебнике).

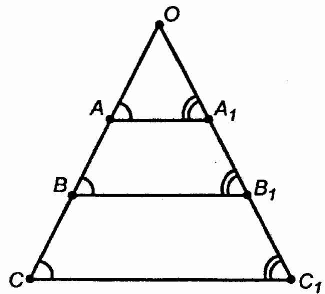
Пусть через a можно провести другую пл. β; $\beta \parallel \alpha$. Тогда через произвольную т. $A \subset a$ проходит сразу две плоскости, параллельные данной плоскости α. А это противоречит доказанному утверждению.

99.

Согласно п. 11, 1° $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$

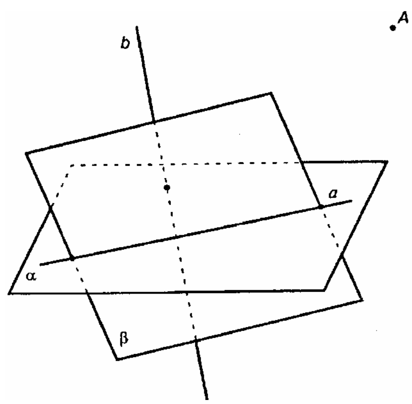
Рассмотрим плоскость OAA_1. В ней по теореме о пропорциональных отрезках выполняется доказываемое утверждение.





Замечание. Если две параллельные прямые пересекают 3 плоскости, то согласно п. 11, 2^o, длины отрезков между двумя плоскостями равны, поэтому их отношения тоже равны.

100.



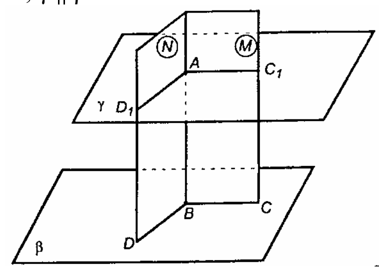
a и b – скрещиваются, $a \subset \alpha$.

По теореме о скрещивающихся прямых (п. 7, теорема вторая), через прямую a можно провести единственную плоскость $\beta \parallel b$.

Докажем, что через т. A можно провести плоскость γ, такую что $\gamma \parallel \beta$.

Через точку A провести плоскость, параллельную данной плоскости β не проходящей через т. A.

Проводим в пл. β через некоторую т. B две произвольные прямые BD и BC. Строим две вспомогательные плоскости: плоскость M – через т. A и прямую BC и плоскость N – через т. A и прямую BD. Искомая плоскость, параллельная пл. β, должна пересечь пл. M по прямой, параллельной BC, а плоскость N – по прямой, параллельной BD (п. 11, 1^o). Отсюда способ построения пл. γ: через т. A проводим в пл. M прямую $AC_1 \parallel BC$, а в пл. N прямую $AD_1 \parallel BD$. Через прямые AC_1 и AD_1 проводим пл. γ. γ – искомая, так как стороны $\angle D_1AC_1$, расположенного в пл. γ, параллельны сторонам $\angle DBC$, расположенного в пл. β. Значит, $\gamma \parallel \beta$.



Так как в пл. M через т. A можно провести лишь одну прямую, параллельную BC, а в плоскости N через т. A можно провести лишь одну прямую, параллельную BD, то задача имеет единственное решение.

Следовательно, через каждую точку пространства можно провести единственную плоскость, параллельную данной плоскости; γ - единственная плоскость.

Если же окажется, что т. $A \in \beta$, то это и будет тот случай, когда через т. A и прямую a проходит пл. β, параллельная прямой b.

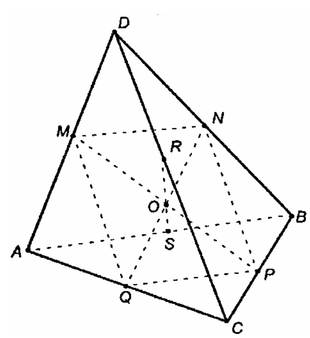
101.

Соединим середины ребер, лежащих в одной грани; получим, что каждый из отрезков будет средней линией соответствующего треугольника.

$MN \parallel AB$, $PQ \parallel AB$, поэтому $MN \parallel PQ$;

$MQ \parallel DC$, $NP \parallel DC$, поэтому $MQ \parallel NP$.

Значит, 4-угольник $MNPQ$ – параллелограмм по определению, его диагонали QN и MP пересекаются в т. O и делятся в ней пополам. Отрезки QN и MP соединяют середины противоположных ребер тетраэдра.



Повторяя проведенные выше рассуждения, заключаем, что RS и QN тоже пересекаются в точке O и делятся ей пополам.

Таким образом, все три отрезка: RS, QN, MP – пересекаются в т. O и делятся в ней пополам.

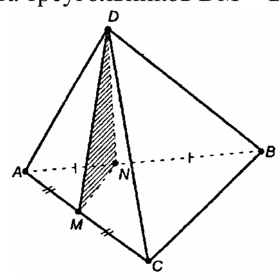
Утверждение доказано.

102.

По теореме I пл. $DNM \parallel DC$ (MN – средняя линия ΔABC, поэтому $MN \parallel BC$).

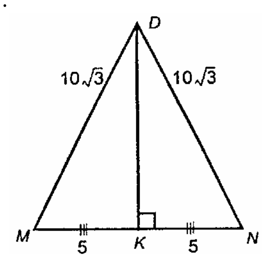
Если все ребра тетраэдра равны, тогда в ΔADC отрезок DM – медиана, а значит и высота и биссектриса. Из ΔADM: $DM = \sqrt{AD^2 - AM^2}$; $DM = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$ (см).

$\Delta AND = \Delta AMD$ (они – прямоугольные, AD – общая гипотенуза, $AM = AN$); из равенства треугольников $DM = DN$;



$MN = \frac{1}{2}BC = 10$.

Рассмотрим ΔMDN.



Проведем в равнобедренном ΔMDN высоту DK.

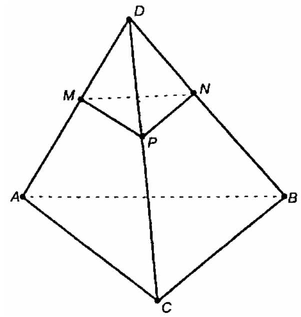
Из ΔMDK: $DK = \sqrt{MD^2 - MK^2} = \sqrt{300 - 25} = 5\sqrt{11}$ (см);

$S_{MDN} = \frac{1}{2}MN \cdot DK = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{11} = 25\sqrt{11}$ (см^2);

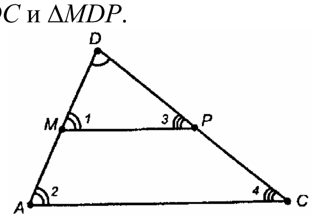
$P_{\Delta MDN} = 10\left(1 + 2\sqrt{3}\right)$ см.

Ответ: $10\left(1 + 2\sqrt{3}\right)$ см и $25\sqrt{11}$ см^2.

103.



Рассмотрим ΔADC и ΔMDP.



Из условия $\frac{DM}{MA} = \frac{DP}{PC}$, но

$AD = MA + MD$, $DC = DP + PC$;

$\frac{DM}{AD - MD} = \frac{DP}{DC - DP}$, или $\frac{AD - MD}{DM} = \frac{DC - DP}{DP}$,

отсюда $\frac{AD}{DM} = \frac{DC}{DP}$.

Так как у ΔADC и ΔMDP угол D – общий, а стороны, образующие $\angle D$ – пропорциональны, значит, $\Delta ADC \sim \Delta MDP$.

Из подобия следует:

$\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

Из равенства углов получим, что $MP \parallel AC$.

Аналогично, для грани DCB, имеем, что $PN \parallel CB$.

Итак, $MP \parallel AC$ и $PN \parallel CB$. По теореме п. 10 пл. $MNP \parallel$ пл. ABC.

$\Delta MNP \sim \Delta ABC$ (по двум углам).

$\frac{DM}{MA} = \frac{2}{1}$, $\frac{DM}{AD - MD} = \frac{2}{1}$ или $\frac{AD - MD}{DM} = \frac{1}{2}$;

$\frac{AD}{DM} - 1 = \frac{1}{2}$; $\frac{AD}{DM} = \frac{3}{2}$.

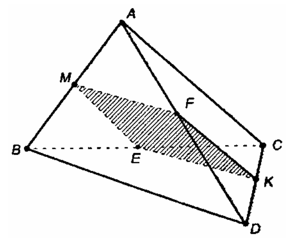
Раз $\Delta ADC \sim \Delta MDP$, то $\frac{AD}{DM} = \frac{AC}{MP}$, $\frac{AC}{MP} = \frac{3}{2}$.

$\dfrac{S_{ABC}}{S_{MNP}} = \left(\dfrac{AC}{MP}\right)^2$, т.к. площади подобных фигур относятся как квадраты линейных размеров.

$\dfrac{10}{S_{MNP}} = \dfrac{9}{4}$, $S_{MNP} = 4\dfrac{4}{9}$ (см^2).

Ответ: $4\dfrac{4}{9}$ см^2.

104.



Проведем $ME \parallel AC$ и $MF \parallel BD$.

По теореме II плоскость сечения пересечет пл. BCD по прямой, параллельной MF ($MF \parallel$ пл. BCD по построению), значит, проводим $EK \parallel BD$. Соединим точки K и F.

4-угольник $MEKF$ – искомое сечение. Докажем это.

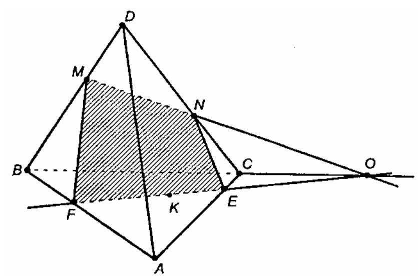
$AC \parallel$ пл. MEF (т.к. $AC \parallel ME$; $ME \subset MEF$).

$BD \parallel$ пл. MEF (т.е. $BD \parallel MF$; $MF \subset MEF$).

Итак, пл. $MEKF \parallel AC$ и пл. $MEKF \parallel BD$.

Так как через т. M можно провести лишь одну прямую $ME \parallel AC$ в плоскости грани ABC и одну прямую $MF \parallel BD$ в плоскости грани BAD, то плоскость $MEKF$ – единственная, удовлетворяющая условию задачи.

105.



а) Договоримся, что MN не параллельна BC.

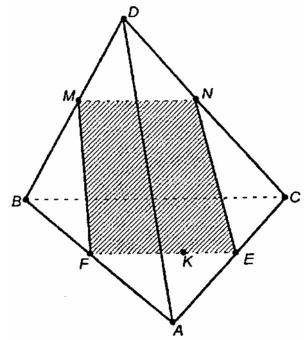
Продолжим MN до пересечения с продолжением BC в точке O. В плоскости ABC соединим точки O и K; OK пересечет ребро AC в точке E; продолжим отрезок OK до пересечения с ребром AB в точке F. Теперь можем соединить точки M и F в плоскости ABD и точки N и E в плоскости ADC.

Сечение $MNEF$ – искомое.

б) Теперь пусть $MN \parallel BC$.

$MN \parallel BC$, $BC \subset$ пл. ABC. По теореме I $MN \parallel$ пл. ABC.

Из теоремы II плоскость сечения пересечет пл. ABC по прямой, проходящей через т. K параллельно MN. В пл. ABC через т. K проводим $FE \parallel BC$ до пересечения со сторонами основания в точках F и E. Соединяя M и F, N и E, получаем сечение $MNEF$.

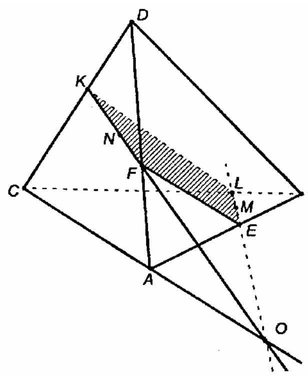


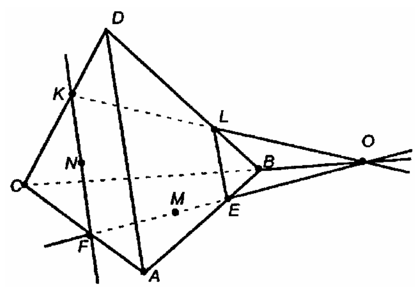
106.

Пусть точки расположены так, как показано на рисунке.

1. Проводим KN до пересечения с продолжением ребра CA. Пусть KN пересечет CA в точке O.
2. Проводим луч OM; он пересечет ребро AB в точке E, а ребро BC – в т. L. Соединим K и L, F и E (т. F – точка пересечения KN с ребром DA).

Сечение $KFEL$ – искомое.

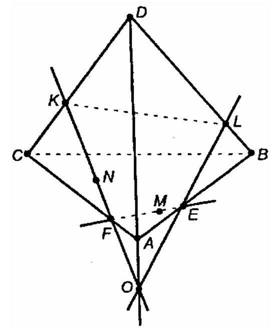




Построим последовательно KN до пересечения в т. F с ребром CA; FM до пересечения с ребром AB в т. E и ребром BC (его продолжением) в т. O; OK, он пересечет DB в т. L; отрезок EL.

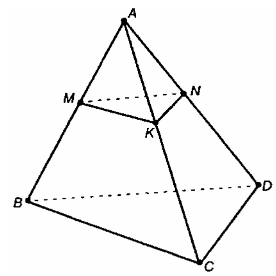
$KFEL$ – искомое сечение.

Проводим KN до пересечения с AC в т. F; продолжаем KN за т. F до пересечения с продолжением DA в т. O; FM до пересечения с AB в т. E; OE до пересечения с DB в т. L; отрезок KL.



KFEL – искомое сечение.

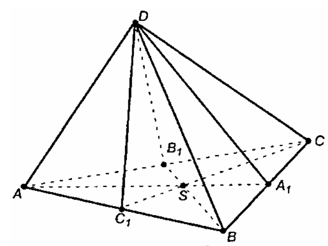
107.



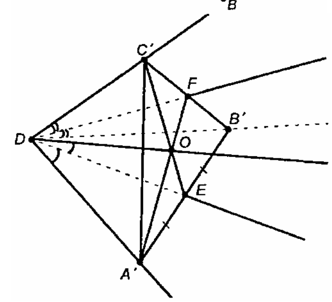
Проведем $MK \parallel BC$ и $MN \parallel BD$; отрезок KN.

По теореме п. 10 пл. $MNK \parallel$ пл. BDC (так как две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости).

108.



Отложим от т. D на ребрах DA, DB, DC равные отрезки: $DA' = DB' = DC' = a$. Соединим точки A', B' и C' отрезками. Нарисуем ограниченную этими отрезками часть тетраэдра, для удобства «положив» его на одну из боковых граней.



Проведем биссектрисы двух углов при вершине D: DE и DF; проведем отрезки $C'E$ и $A'F$.

В $\Delta A'DB'$ $DA' = DB'$ и DE является медианой, следовательно, $EA' = B'E$ (т.к. $\Delta A'DB'$ равнобедренный).

В $\Delta C'DB'$ DF – общая, $DC' = DB'$, $\angle C'DF = \angle B'DF$, поэтому $\Delta C'DF = \Delta B'DF$, следовательно, $C'F = F'B$.

В $\Delta A'B'C'$ отрезки $C'E$ и $A'F$ являются медианами.

Чтобы на загромождать рисунок, не показана биссектриса $\angle A'DC'$. Если для нее повторить рассуждения, то убедимся, что отрезок, исходящий из B' в точку, где биссектриса пересечет сторону $A'C'$, будет третьей медианой в $\Delta A'B'C'$. А три медианы треугольника пересекаются в одной точке.

Таким образом, плоскости DEC', DFA' и третья, не показанная на рисунке, пересекаются на рисунке по прямой DO.

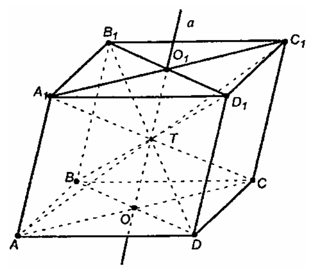
Уберем ограничение, что $DA' = DB' = DC'$. Факт, что плоскости пересекаются по прямой DO, останется верным.

Равные отрезки от вершины D можно отложить в любом тетраэдре, поэтому на строгость (или общность) доказательства это повлиять не может.

Раз указанные плоскости пересекаются по прямой DO, то эта прямая пересечется с плоскостью основания в некоторой точке, значит, все три отрезка AA_1, CC_1 и BB_1 проходят через нее.

Что и требовалось доказать.

109.

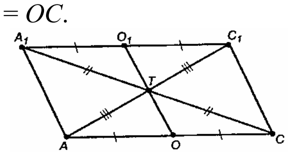


Доказательство

1. По условию, искомая прямая a есть линия пересечения двух плоскостей: AA_1C_1C и BB_1D_1D.
2. Проведем диагонали оснований параллелепипеда; они пересекаются в т. O_1 и т. O.
3. $O \in$ пл. A_1C_1CA, $O \in$ пл. B_1D_1DB.

Т. O_1 принадлежит тем же плоскостям. Следовательно, OO_1 – прямая пересечения этих плоскостей (аксиома A_2).

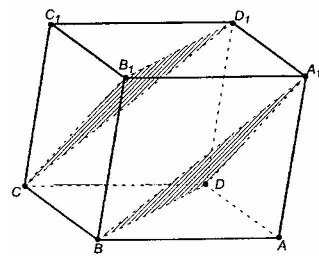
4. Прямая a есть прямая OO_1.
5. Основания параллелепипеда – равные параллелограммы; по свойству параллелограмма $A_1O_1=O_1C_1 = =AO = OC$.



6. A_1O_1OA – параллелограмм, значит, $O_1O \parallel A_1A \parallel C_1C$.
7. Аналогично получаем, что $O_1O \parallel B_1B \parallel D_1D$.
8. Проведем диагонали AC_1 и A_1C. Раз A_1C_1CA – параллелограмм, то $A_1T = TC$, $AT = TC_1$, где T – точка пересечения диагоналей.
9. OT – средняя линия ΔA_1CA; O_1T – средняя линия ΔA_1CC_1.

$\left.\begin{matrix} OT \parallel AA_1 \\ O_1T \parallel AA_1 \end{matrix}\right\}$ по аксиоме о параллельных прямых в плоскости точки O, O_1 и T лежат на одной прямой, $T \in OO_1$, или $T \in a$. Диагонали параллелепипеда и прямая a пересекаются в одной точке.

110.



Доказательство

1. Рассмотрим 4-угольник BB_1D_1D.
$BB_1 \parallel DD_1$, $BB_1 = DD_1$

По признаку параллелограмма, BB_1D_1D – параллелограмм, $B_1D_1 \parallel BD$.

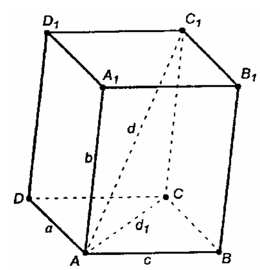
2. Рассмотрим 4-угольник CB_1A_1D.

$A_1B_1 \parallel CD$ и $A_1B_1 = CD$ (п. 11, 2°). Следовательно, CB_1A_1D – параллелограмм.

$CB_1 \parallel A_1D$.

3. Пл. $CB_1D_1 \parallel$ пл. A_1DB (параллельность двух пересекающихся прямых одной плоскости соответственно двум пересекающимся прямым другой плоскости).

№ 111.



Проведем отрезок AC; по неравенству треугольника $AC = d_1 < a + c$.

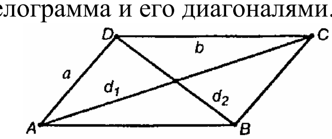
Для ΔACC_1 $AC_1 = d < d_1 + b$, поэтому $d < a + c + b$.

Что и требовалось доказать.

№ 112.

Будем исходить из того, что диагональное сечение параллелепипеда – параллелограмм.

Решим вспомогательную задачу: установим зависимость между сторонами параллелограмма и его диагоналями.



Пусть $AC = d_1$, $DB = d_2$, $AD = CB = a$. $AB = DC = b$, $\angle DAB = \alpha$, тогда $\angle ADC = 180^o$ - α.

Для Δ DAB запишем теорему косинусов:

$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2abc\cos\alpha$.

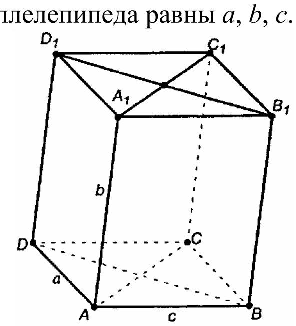
Для ΔADC запишем теорему косинусов:

$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2abc\cos\left(180^o - \alpha\right) = a^2 + b^2 + 2abc\cos\alpha$.

Складывая эти равенства, получаем:

$d_2^2 + d_1^2 = 2a^2 + 2b^2$.

Пусть ребра параллелепипеда равны a, b, c.



Для плоскости DD_1B_1B

$D_1B^2 + DB_1^2 = 2 \cdot DB^2 + BB_1^2 \cdot 2$.

Для плоскости AA_1C_1C

$A_1C^2 + AC_1^2 = 2 \cdot AC^2 + 2AA_1^2$.

Сложим равенства:

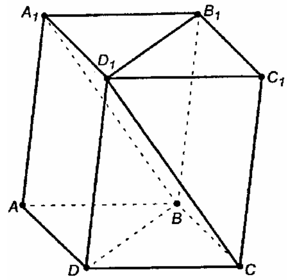
$D_1B^2 + DB_1^2 + A_1C^2 + AC_1^2 = 2 \cdot DB^2 + 2 \cdot BB_1^2 + 2 \cdot AC^2 + 2 \cdot AA_1^2 =$

$= 2\left(DB^2 + AC^2\right) + 2 \cdot AA_1^2 + 2 \cdot AA_1^2 = 2\left(2a^2 + 2c^2\right) + 4 \cdot b^2 =$

$= 4a^2 + 4b^3 + 4c^2$, а это сумма квадратов всех ребер параллелепипеда.

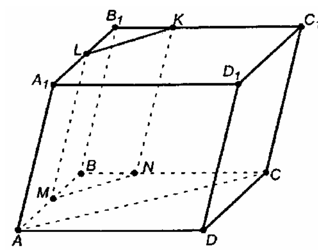
Что и требовалось доказать.

113.



B и D_1 – общие точки двух плоскостей, по аксиоме A_3 плоскости пересекаются по прямой BD_1.

114.

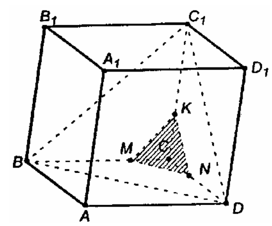


Построим $MN \parallel AC$. По теореме I, $MN \parallel$ пл. ACC_1.

Построим $ML \parallel AA_1$ и $NK \parallel AA_1$; получили отрезок LK.

По теореме п. 10 пл. $MNKL \parallel$ пл. ACC_1A_1 (т.к. $MN \parallel AC$, $ML \parallel AA_1$).

115.



Проводим BC_1, DC_1, AD. Плоскость BDC_1 построена. Через т. M проведем:

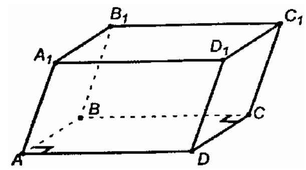
$MN \parallel BD$;

$MK \parallel BC_1$.

Пл. $MKN \parallel$ пл. BC_1D по известной теореме.

ГЛАВА II
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

116.



Решение:

1. Все грани параллелепипеда – параллелограммы.
2. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.

В параллелограмме $ABCD$: $\angle A = \angle C = 90^o$, $ABCD$ – прямоугольник, $DC \perp BC$.

В плоскости BB_1C_1C: $B_1C_1 \parallel BC$. Итак,

$\left.\begin{matrix} B_1C_1 \parallel BC \\ DC \perp BC \end{matrix}\right\}$ отсюда $DC \perp B_1C_1$.

В плоскости AA_1D_1D: $A_1D_1 \parallel AD$. Итак,

$\left.\begin{matrix} AB \perp AD \\ AD \parallel A_1D_1 \end{matrix}\right\}$ отсюда $AB \perp A_1D_1$.

Что и требовалось доказать.

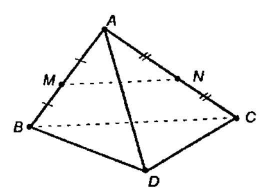
117.

В тетраэдре $ABCD$ известно, что $BC \perp AD$. Докажите, что $AD \perp MN$, где M и N – середины ребер AB и AC.

$AD \perp BC$;

$MN \parallel BC$ (как средняя линия ΔBAC), то $AD \perp MN$ (по лемме п. 15).

Что и требовалось доказать.



118.

Условие

Точки A, M и O лежат на прямой, перпендикулярной к плоскости α, а точки O, B, C и D лежат в плоскости α. Какие из следующих углов являются прямыми: $\angle AOB$, $\angle MOC$, $\angle DAM$, $\angle DOA$, $\angle BMO$?

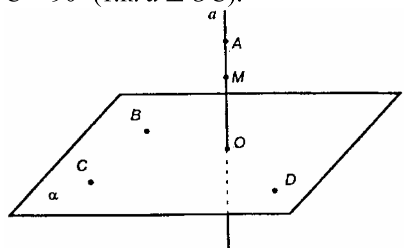
Решение:

$a \perp \alpha$, поэтому a перпендикулярна любой прямой, лежащей в пл. α.

Чтобы прямая принадлежала пл. α, достаточно, чтобы 2 точки прямой принадлежали пл. α.

$BO \subset \alpha$, $\angle AOB = 90^o$ (т.к. $a \perp BO$);

$OC \subset \alpha$, $\angle AOC = 90^o$ (т.к. $a \perp OC$).



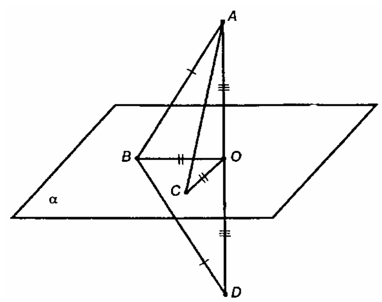
$DO \subset \alpha$, $\angle DOA = 90^o$ (т.к. $a \perp DO$);

$DA \not\subset \alpha$, $\angle DAM \neq 90^o$;

$BM \not\subset \alpha$, $\angle BMO \neq 90^o$.

Ответ: прямые углы: $\angle AOB$, $\angle AOC$, $\angle DOA$.

119.



Решение:

а) Рассмотрим ΔABD.

$AO \perp$ пл. BOC, поэтому $AO \perp OB$;

$$\left.\begin{matrix} AO = OD \\ BO \perp AD \\ BO = BO \end{matrix}\right\} \Delta BOA = \Delta BOD \text{ – по двум катетам, } BA = BD.$$

$AB = BD$.

б) Рассмотрим ΔAOB и ΔAOC.

$AO \perp OB$, $AO \perp OC$ – по определению;

$OB = OC$ – по условию;

AO – общая.

Треугольники AOB и AOC равны по двум катетам. Отсюда:

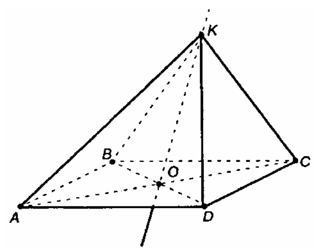
$AB = AC$.

в) Т.к. $AB = AC$, то прямоугольные треугольники AOB и AOC равны по гипотенузе и катету (AO – общий катет), поэтому

$OB = OC$.

Что и требовалось доказать.

120.



Решение

$\Delta KOA = \Delta KOB = \Delta KOC = \Delta KOD$ по двум катетам ($KO \perp OA$, $KO \perp OB$, $KO \perp OC$, $KO \perp OD$ – по определению, KO – общий катет, $OB = OA = OC = OD$); поэтому $KA = KB = KC = KD$.

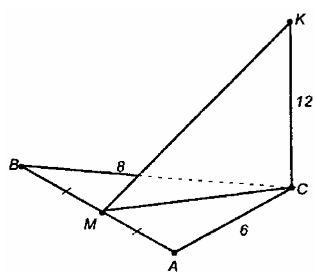
$KB^2 = OK^2 + OB^2$, отсюда: $KB^2 = b^2 + OB^2$.

$$BD = a\sqrt{2},\ OB = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2};\ OB^2 = \frac{a^2}{2};\ KB^2 = b^2 + \frac{a^2}{2};$$

$$KB = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{2}}.$$

121.

Решение:

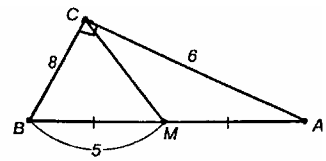


$KC \perp CM$ (т.к. $KC \perp ABC$).

ΔKMC прямоугольный.

$MK^2 = CK^2 + MC^2$; $MK^2 = 144 + MC^2$;

$AB=\sqrt{64+36}=10$ (см), BM=5 см.



$\cos\angle B=\dfrac{BC}{AB}$, $\cos\angle B=\dfrac{4}{5}$.

ΔMBC, теорема косинусов:

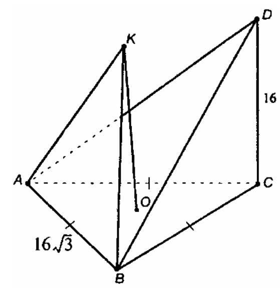
$CM^2 = BC^2 + BM^2 - 2\cdot BC\cdot BM\cdot\cos\angle B$;

$CM^2=64+25-2\cdot 8\cdot 5\cdot\dfrac{4}{5}=25$;

$MK^2 = 144 + 25 = 169$, следовательно, $MK = 13$ (см).

Ответ: 13 см.

122.

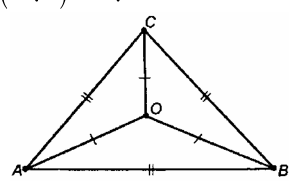


Решение:

Рассмотрим ΔDAC и ΔDCB.

$DC\perp CA$, $DC\perp CB$ – по условию, DC – общая, $AC = BC$, то $\Delta DAC = \Delta DCB$. Отсюда $DA = DB$.

$DA=DB=\sqrt{16^2+\left(16\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{16^2+16^2\cdot 3}=32$ (см).



$OA = OB = OC = R$, R – радиус описанной окружности.

$2R=\dfrac{a}{\sin\alpha}$ (следствие из теоремы синусов);

$R=\dfrac{AB}{2\sin\angle C}$, $R=\dfrac{16\sqrt{3}}{2\sin 60^{\circ}}=\dfrac{16\sqrt{3}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=16$.

Итак, $OA = OB = OC = 16$ см.

Итак, $OK\perp OA$, $KO\perp OB$.

$\Delta KOA = \Delta KOB$ (прямоугольные, равны по двум катетам), следовательно, $AK = KB$.

$AK = KB = \sqrt{OA^2 + OK^2} = 20$ см.

Ответ: $DA = DB = 32$ см; $AK = KB = 20$ см.

123.

Дано: α, $\beta \perp a$.

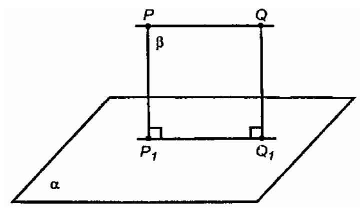
Решение:

Смотри решение в учебнике на стр. 39.

124.

Дано: $PQ \parallel a$; PP_1, $QQ_1 \perp \alpha$.

Решение:



$PP_1 \parallel Q_1Q$, как перпендикулярные одной плоскости.

Следовательно, PP_1 и QQ_1 принадлежат одной плоскости. Назовем ее β. Пусть P_1Q_1 – линия пересечения плоскостей α и β.

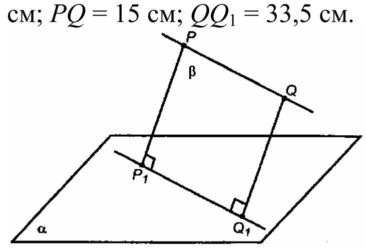
Тогда $P_1Q_1 \parallel PQ$.

Таким образом, PQQ_1P_1 – параллелограмм, следовательно, $PQ = P_1Q_1$.

Что и требовалось доказать.

125.

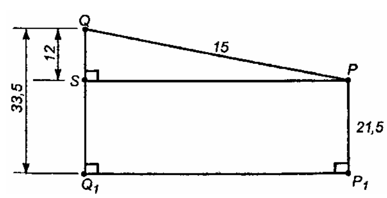
Дано: PQ; $PP_1 \parallel QQ_1$; $PP_1 = 21{,}5$ см; $PQ = 15$ см; $QQ_1 = 33{,}5$ см.



$PP_1 \parallel QQ_1$ как перпендикулярные одной плоскости.

Значит, PP_1 и QQ_1 принадлежат плоскости β.

Линия пересечения плоскостей α и β есть P_1Q_1, то PQQ_1P_1 – трапеция.



Рассмотрим плоскость β.

ΔQSP есть прямоугольный треугольник и:

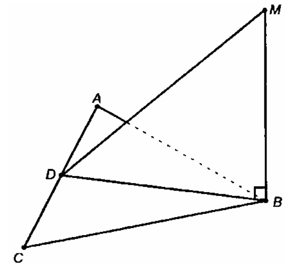
$SP = Q_1P_1 = 9$ см (по теореме Пифагора).

Ответ: $SP = 9$ см.

126.

Дано: $MB \perp AB$, BC; $D \in AC$.

Решение:



$MB \perp$ пл. ABC по признаку перпендикулярности.

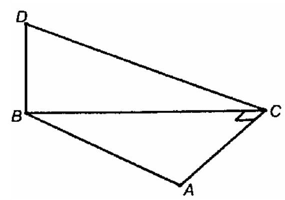
По определению $BD \perp MB$.

ΔMBD – прямоугольный, $\angle MBD = 90^o$.

Ответ: треугольник MBD является прямоугольным.

127.

Дано: ΔABC; $\angle A + \angle B = 90^o$.



Т.к. $\angle A + \angle B = 90^o$, то $\angle C = 90^o$ (т.к. $\angle C=180^o - (\angle A + \angle B)= 90^o$).

$AC \perp BD$ – по условию;

$AC \perp BC$.

Тогда, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $AC \perp$ пл. BDC (т.к. перпендикулярна двум прямым в ней).

Следовательно, $AC \perp DC$.

Что и требовалось доказать.

128.

Дано: $ABCD$; т. O; $MA = MC$; $MB = MD$.

Решение:

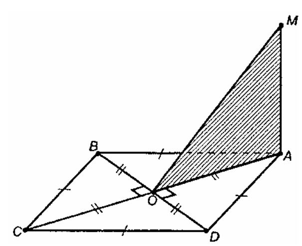
Точка M равноудалена от A и C, B и D. Значит, она лежит на серединном перпендикуляре к AC и BD. То есть $OM \perp AC$, $OM \perp BD$. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости $OM \perp$ пл. ABC.

Что и требовалось доказать.

129.

Дано: $AM \perp (ABCD)$; т. O.

Решение:



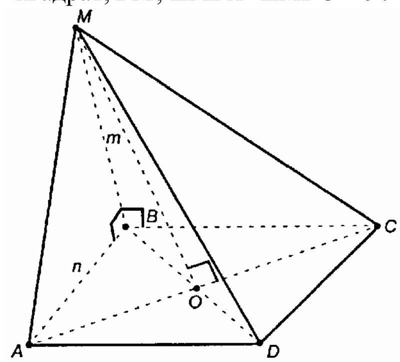
а) $BO \perp MO$, $BO \perp AO$, следовательно, $BO \perp$ пл. MAO.

б) Т.к. $BO \perp$пл. MAO, то $BO \perp OM$.

Что и требовалось доказать.

130.

Дано: $ABCD$ – квадрат; BM; $\angle MBA = \angle MBC = 90^\circ$; $MB = m$; $AB = n$.



Решение

а) 1) $\Delta MBA = \Delta MBC$ по условию, MB – общий; $BA = BC$ есть стороны квадрата.

Значит, $MC = MA = \sqrt{m^2 + n^2}$.

2) ΔMBD является прямоугольным, т.к. $MB \perp$ пл. ABC и $BD \subset$ пл. ABC.

$MD = \sqrt{MB^2 + BD^2}$, где $BD = \sqrt{n^2 + n^2} = n\sqrt{2}$;

$MD = \sqrt{2n^2 + m^2}$.

б) По определению перпендикуляра:

$\rho(M, BD) = MB = m$.

Рассмотрим ΔMBO и прямую AC.

По свойству диагоналей квадрата $BO \perp AC$; $MB \perp AC$, т.к. $MB \perp ABC$; MB не перпендикулярна BO, тогда $AC \perp MBO$.

Значит, $AC \perp MO$.

Тогда $\rho(M, AC) = MO$.

ΔMBO: $MO = \sqrt{MB^2 + BO^2}$;

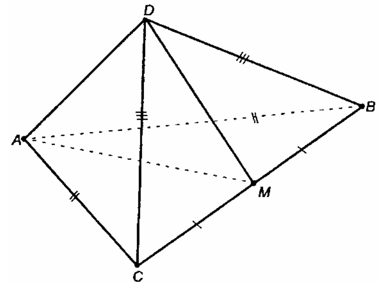
$MO = \sqrt{m^2 + \frac{n^2}{2}}$.

Ответ: а) $MC = MA = \sqrt{m^2 + n^2}$; $MD = \sqrt{2n^2 + m^2}$;

б) $\rho(M, BD) = m$, $\rho(M, AC) = \sqrt{m^2 + \frac{n^2}{2}}$.

131.

Дано: $ABCD$ – тетраэдр; $AB = AC$; $DB = DC$.



Решение:

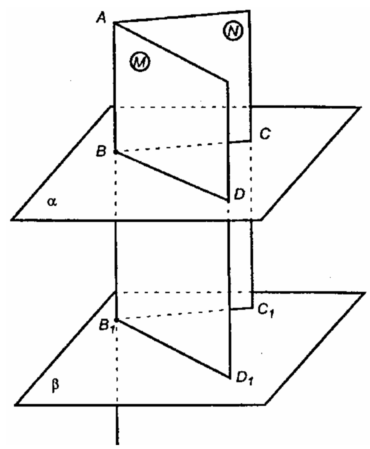
ΔABC – равнобедренный, AM – медиана, то и высота, то есть $AM \perp BC$.

ΔDCB – равнобедренный, DM – медиана, то и высота, то есть $DM \perp BC$.

Т.к. MD и MA пересекаются, то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $CB \perp$ пл. AMD.

Что и требовалось доказать.

132.



Решение:

Пусть $\alpha \parallel \beta$, а прямая $BB_1 \perp \alpha$. Докажем, что $BB_1 \perp \beta$.

Проведем через BB_1 плоскости M и N;

$BC \parallel B_1C_1$ и $BD \parallel B_1D_1$.

По условию $BB_1 \perp BC$ и $BB_1 \perp BD$ (т.к. $BB_1 \perp \alpha$).

$BB_1 \perp B_1C_1$ и $BB_1 \perp B_1D_1$.

$BB_1 \perp \beta$, т.к. B_1C_1 и B_1D_1 пересекаются и лежат в плоскости β.

133.

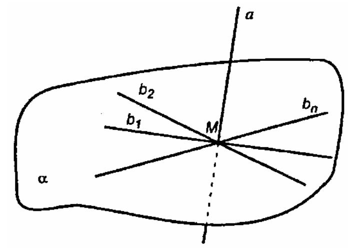
Задача решена в учебнике на стр. 40.

134.

Дано: т. M; $M \in a$; $b_1 \ldots b_n \perp a$.

Решение:

$b_1 \perp a$, $b_2 \perp a$, $M \in b_1$, $M \in b_2$, т.е. b_1 и b_2 пересекаются.



Из вышеперечисленных фактов следует, что по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая a перпендикулярна α. Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и притом единственную, следовательно, любая прямая b_n, проходящая через т. M и перпендикулярная к a, лежит в α.

Предположим $b_n \not\subset \alpha$.

То через b_2 и b_n можно провести плоскость γ и:

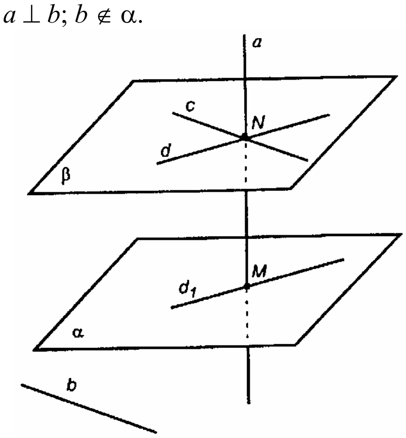
$$\left.\begin{matrix} a \perp b_2 \\ a \perp b_n \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \perp \gamma .$$

Следовательно, через т. M проходит сразу две плоскости α и $\gamma \perp a$, а через любую точку пространства проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой. Значит, наше предположение неверно и $b_n \subset \alpha$.

Что и требовалось доказать.

135.

Дано: $a \perp \alpha$; $a \perp b$; $b \notin \alpha$.



Решение:

Пусть M – точка пересечения a с α. $N \in a$.

Проведем через т. N прямую $c \parallel b$.

В пл. α через т. M проведем прямую d_1.

Через т. N проведем прямую $d \parallel d_1$.

$a \perp d_1$, $d_1 \parallel d$, поэтому $a \perp d$.

Т. о. $a \perp \beta$. (Через т. A проходит единственная β, перпендикулярная к a).

α; $\beta \perp a \Rightarrow \alpha \parallel \beta$.

$\left.\begin{matrix} b \parallel c \\ c \subset \beta, \alpha \parallel \beta \end{matrix}\right\} \rightarrow b \parallel \beta$, следовательно, $b \parallel \alpha$.

Что и требовалось доказать.

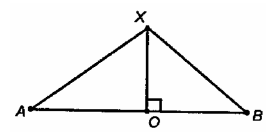
136.

Дано: $AX = BX$.

Решение:

Выясним, чем является Г М Т точек равноудаленных от A и B.

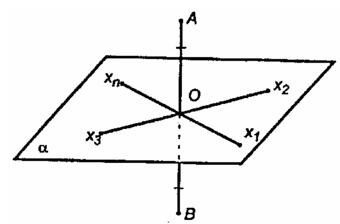
$OA = OB$.



Утверждение задачи следует из того, что в каждой плоскости, проходящей через AB и некоторую x_n (см. рисунок), x_n будет серединным перпендикуляром к AB, то есть ГМТ, равноудаленный от A и B.

137.

Решение



Пусть скрещивающиеся прямые a и b лежат в параллельных плоскостях (известная теорема).

1. Проведем через b пл. β; $\beta \parallel a$.
2. Проведем $AA_1 \perp \beta$ и $BB_1 \perp \beta$.
3. По теореме II $A_1B_1 \parallel AB$ (если $AB \subset A_1ABB_1$ и $AB \parallel \beta$, то $A_1B_1 \parallel AB$).
4. $AB \parallel A_1B_1$ и $AB \perp b$, то $A_1B_1 \perp b$.
5. Из т. C_1 проведем $C_1C \perp \beta$. Она пересечет AB в точке C ($b \perp$ пл. AC_1A_1. В пл. AC_1A_1 проведем $C_1C \parallel A_1A$. Тогда $b \perp C_1C$ – по определению. Если найдется прямая $C_1C_2 \perp \beta$ и C_2 не совпадает с C,

тогда через т. C_1 будет проходить 2 плоскости, перпендикулярные к b: пл. A_1ABB_1 и пл. CC_1C_2; а это невозможно).

Итак, $b \perp C_1C$.

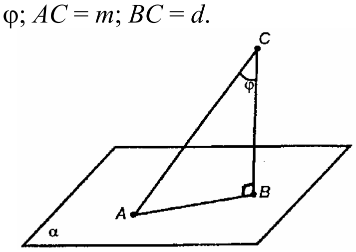
6. $b \perp A_1B_1$, $b \perp C_1C$ и $A_1B_1 \cap C_1C \Rightarrow b \perp A_1ABB_1$.

Т.о. через a проходит плоскость $\perp$ к b.

Что и требовалось доказать.

138.

Дано: $\angle ACB = \varphi$; $AC = m$; $BC = d$.



$CB \perp \alpha$; CA – наклонная.

а) ΔABC – прямоугольный, т.к. $\angle B = 90^o$.

$BC = d$ (по условию).

$AC = \dfrac{d}{\cos\varphi}$; $AB = d \cdot \mathrm{tg}\varphi$ (из соотношений в прямоугольном треугольнике).

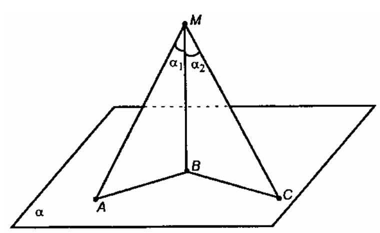
б) $AC = m$;

$CB = m \cdot \cos\varphi$; $AB = m \cdot \sin\varphi$ (из соотношений в прямоугольном треугольнике).

Ответ: а) $AC = \dfrac{d}{\cos\varphi}$; $AB = d\, \mathrm{tg}\varphi$;

б) $CB = m \cos\varphi$; $AB = m \sin\varphi$.

139.



Решение:

а) $MA = MC$ (по условию);

ΔMBA и ΔMBC – прямоугольные, MB – общий катет, $MA = MC$, следовательно, $\Delta MBA = \Delta MBC$, значит, $AB = BC$.

б) $BA = BC$ (по условию).

Из равенства прямоугольных треугольников MBA и MBC следует, что $MA = MC$.

в) $MA > MC$ (по условию).

По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{MA^2 - MB^2};\ BC = \sqrt{MC^2 - MB^2}\ .$$

$MA^2 > MC^2$, поэтому $MA^2 - MB^2 > MC^2 - MB^2$, это означает, что $AC^2 > >BC^2 \Rightarrow AB > BC$.

Что и требовалось доказать.

140.

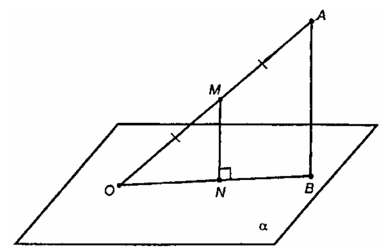
В задаче некорректно условие (не хватает данных).

141.

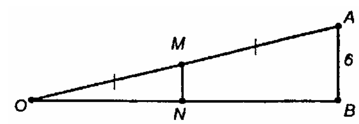
Решение:

AO – отрезок, $O \in \alpha$, $\rho(A, \alpha) =$ $= 6$ см, $OM = MA$. Найти $\rho(M, \alpha)$.

Проведем $AB \perp \alpha$ и отрезок BO. Получим плоскость AOB.



Из т. M проведем в пл. AOB отрезок $MN \parallel AB$, т. N – пересечение отрезка с пл. α. Доказано (п. 21), что $N \in OB$, т.е. $MN \subset$ пл. AOB (см. учебник).



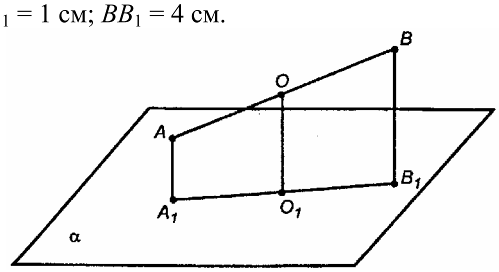
MN – средняя линия ΔOAB (по теореме Фалеса $ON = NB$).

$$MN = \frac{1}{2}AB,\ MN = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \text{ см.}$$

Ответ: $MN = 3$ см.

142.

Дано: $AA_1 = 1$ см; $BB_1 = 4$ см.



Рассмотрим два случая:

Случай I. Если AB не пересекает α, то имеем:

$AA_1 = 1$ см, $BB_1 = 4$ см, O – середина AB;

$AA_1 \perp \alpha$ и $BB_1 \perp \alpha$, то $AA_1 \parallel BB_1$.

Согласно аксиоме, через AA_1 и BB_1 можно провести единственную плоскость ABB_1A_1.

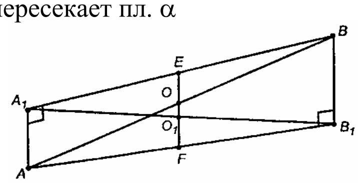
В пл. ABB_1A_1 проводим $OO_1 \parallel BB_1$. Согласно п. 21°, т. $O \in A_1B_1$.

Значит, $OO_1 \perp \alpha$, OO_1 – искомый отрезок. $\rho(O, \alpha) = OO_1$.

Т.о. OO_1 – средняя линия трапеции;

$OO_1 = \dfrac{AA_1 + BB_1}{2}$; $OO_1 = 2{,}5$ см.

Случай II. AB пересекает пл. α



Продолжим O_1O до пересечения с A_1B и AB_1 в точках E и F.

$AO = OB$, $OO_1 \parallel BB_1$, то по теореме Фалеса $AF = FB_1$.

$O_1F \parallel AA_1$, по теореме Фалеса $A_1O_1 = O_1B_1$.

В ΔAA_1B_1: O_1F – средняя линия, то есть $O_1F = \dfrac{AA_1}{2} = 0{,}5$ см.

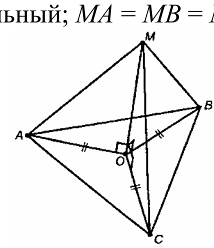
ΔABB_1: OF – средняя линия, то есть $OF = \dfrac{BB_1}{2} = 2$ (см).

$OO_1 = OF - O_1F = 1{,}5$ см.

Ответ: 2,5 см или 1,5 см (в зависимости от того, пересекает ли AB плоскость α).

143.

Дано: ΔABC – правильный; $MA = MB = MC = 4$ см; $AB = 6$ см.



Проводим $MO \perp$ пл. ABC.

Т.к. равные наклонные имеют равные проекции, $AO=OB=OC=R$, где R – радиус описанной окружности около ΔABC.

По следствию из теоремы синусов: $R = \dfrac{AB}{2\sin\angle C}$;

$R = \dfrac{6}{2\sin 60^\circ} = 2\sqrt{3}$ см.

ΔAOM – прямоугольный, то

$\rho(M, (ABC)) = MO = \sqrt{AM^2 - AO^2}$; $MO = 2$ см.

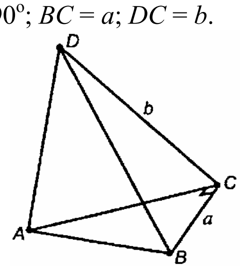
Ответ: $\rho(M; (ABC)) = 2$ см.

144.

Задача решена в учебнике на стр. 44.

145.

Дано: ΔABC; $\angle C = 90^\circ$; $BC = a$; $DC = b$.



а) $AD \perp$ пл. ABC, следовательно, $AD \perp CB$;

$AD \perp BC$, $AC \perp CB$, то по теореме о 3-х перпендикулярах $DC \perp BC$, то есть треугольник CBD – прямоугольный.

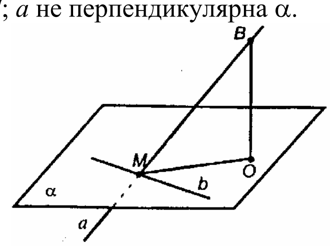
Что и требовалось доказать.

б) $\angle DCB = 90^\circ$, $BD^2 = DC^2 + CB^2$; $BD = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ответ: $BD = \sqrt{a^2 + b^2}$.

146.

Дано: $a \cap \alpha = M$; a не перпендикулярна α.



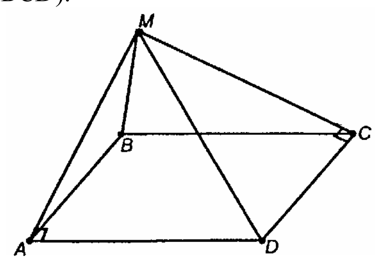
Решение:

Если бы через т. M проходили две прямые, перпендикулярные к a, тогда по признаку перпендикулярности прямой к плоскости должно быть $a \perp \alpha$, а по условию a не перпендикулярна α. Т.о. b – единственная прямая, которая, проходя через т. M, перпендикулярна a.

Что и требовалось доказать.

147.

Дано: $MB \perp (ABCD)$.



$AD \perp AB$, $AD \perp MB$, то по теореме о 3-х перпендиулярах $\angle MAD = 90^{\circ}$.

$MB \perp DC$, $BC \perp CD$, то по теореме о 3-х перпендикулярах $\angle MCD = 90^{\circ}$.

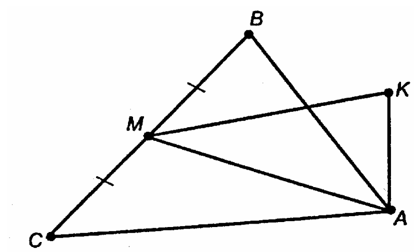
Что и требовалось доказать.

148.

Дано: ΔABC – правильный; $MB = BC$; $AK \perp (ABC)$.

Решение:

AM – медиана в правильном ΔABC, то $MA \perp BC$ (так как MA и высота).

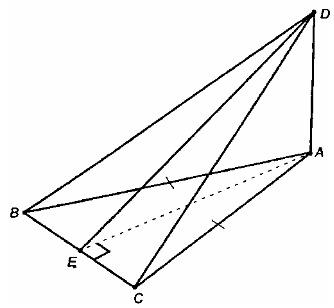


$MA \perp BC$, $KA \perp BC$, то по теореме о 3-х перпендикулярах $BC \perp KM$.

Что и требовалось доказать.

149.

Дано: ΔABC – равнобедренный; $AD \perp (ABC)$; $AB = AC = 5$ см; $BC = 6$ см; $AD = 12$ см.



Решение:

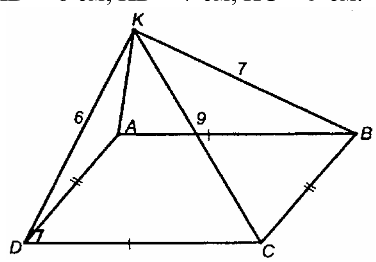
Проведем $AE \perp BC$; в равнобедренном ΔABC AE – высота и медиана, $BE = EC = 3$см. Из ΔCEA $AE = \sqrt{AC^2 - EC^2}$;

$AE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (см).

$BC \perp AE$, $BC \perp DA$, то по теореме о 3-х перпендикулярах $BC \perp DE$.

150.

Дано: $ABCD$; $KD = 6$ см; $KB = 7$ см; $KC = 9$ см.



Решение

а) $\rho(K$, пл. $ABCD) - KA$, ибо $KA \perp$ пл. $ABCD$ – по условию.

ΔKDC – прямоугольный, $\angle KDC = 90^\circ$ ($KA \perp DC$, $AD \perp DC$ – по теореме о 3-х перпендикулярах $KD \perp DC$).

$DC = \sqrt{KC^2 - KD^2}$; $DC = \sqrt{81 - 36} = 3\sqrt{5}$ см.

$\angle KAB = 90^\circ$.

$KA = \sqrt{KB^2 - AB^2}$; $AB = DC$;

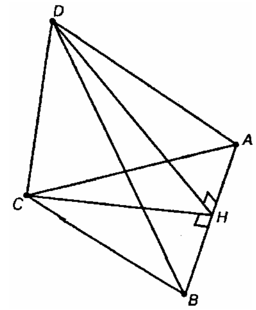
$KA = \sqrt{49 - 45} = \sqrt{4} = 2$ см.

б) Плоскость $KAB \parallel DC$, т.к. $DC \parallel AB$. Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми $\rho(AK, CD) = DA$, ведь $DA \perp$ пл. KAB. Из ΔDAK $DA = \sqrt{DK^2 - KA^2}$; $DA = \sqrt{36 - 4} = 4\sqrt{2}$ см.

Ответ: $KA = 2$ см; $DA = 4\sqrt{2}$ см.

151.

Дано: $CD \perp (ABC)$; DH – высота в ABD.



Решение:

Найдем проекцию границы ΔABD на (ABC).

Проекция DB на (ABC) – отрезок CB; проекция DA на (ABC) – отрезок AC. AB является своей проекцией.

Т.о. проекция границы ΔDAB на пл. ABC есть стороны ΔABC, внутренние точки ΔDAB проектируются во внутренние точки ΔABC, тогда ΔABC есть проекция ΔDAB на плоскость ABC.

$CH \perp AB$, $DC \perp AB$, то $DH \perp AB$ (теорема о 3-х перпендикулярах).

Таким образом, DH – высота ΔDAB.

Что и требовалось доказать.

152.

Дано: $ABCD$; $BF \perp (ABCD)$; $BF = 8$ дм; $AB = 4$ дм.

Решение:

$FA \perp AD$, $\rho(F, AD) = \sqrt{FB^2 + AB^2} = \sqrt{64+16} = 4\sqrt{5}$ дм.

$FC \perp DC$; $\rho(F, DC) = \rho(F, AD) = 4\sqrt{5}$ дм (аналогично предыдущему пункту).

$\rho(F, AB) = \rho(F, BC) = 8$ дм $= \rho(F, BD)$ (т.к. это есть BF).

$BD \perp FB$, $FB \perp AC$, то по теореме о 3-х перпендикулярах $FO \perp AC$.

$BD = 4 \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ дм; $BO = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ дм.

$BD = AB \cdot \sqrt{2}$; $BO = \frac{1}{2} BD$.

$FO = \rho(F, AC) = \sqrt{BO^2 + FB^2} = \sqrt{8+64} = 6\sqrt{2}$ дм.

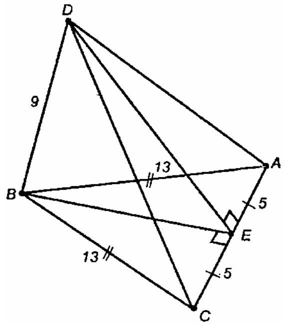
Ответ: 8 дм, 8 дм, $4\sqrt{5}$ дм, $4\sqrt{5}$ дм; 8 дм; $6\sqrt{2}$ дм.

153.

Задача решена в учебнике.

154.

Дано: $BD \perp (ABC)$; $BD = 9$ см; $AC = 10$ см; $BC = BA = 13$ см.



Решение:

а) Проведем $BE \perp AC$, $CE = EA$, так как ΔABC – равнобедренный и высота является также медианой.

$BD \perp AC$, $BE \perp AC$, то по теореме о 3-х перпендикулярах $DE \perp AC$.

$\rho(D, AC) = DE = \sqrt{BD^2 + BE^2}$;

ΔCBE: $BE = \sqrt{BC^2 - EC^2}$; $BE = \sqrt{169 - 25} = 12$ см.

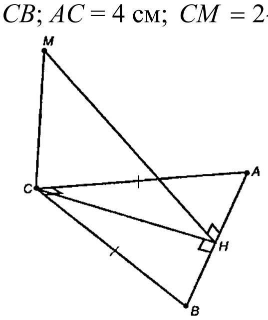
$\rho(D, AC) = DE = \sqrt{81 + 144} = 15$ см.

б) $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot DE$, $S_{ACD} = \frac{10 \cdot 15}{2} = 75$ см^2 (т.к. AC – основание, DE – высота).

Ответ: а) 15 см; б) 75 см^2.

155.

Дано: ΔABC; $AC = CB$; $AC = 4$ см; $CM = 2\sqrt{7}$ см.



Решение:

$CH \perp AB$, $MC \perp AB$, то по теореме о 3-х перпендикулярах $MH \perp AB$.

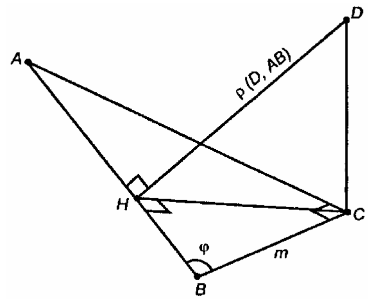
$\rho(M, AB) = MH = \sqrt{MC^2 + CH^2}$ (т.к. $MH \perp AB$).

В ΔABC: $CH = BC \cdot \sin 45^\circ = 2\sqrt{2}$ см (соотношения в прямоугольном треугольнике).

$MH = \sqrt{28+8} = 6$ см.

Ответ: 6 см.

156.



Проведем $CH \perp AB$ и DH.

$\left.\begin{matrix} DC \perp AB \\ CH \perp AB \end{matrix}\right\}$ по теореме о 3-х перпендикулярах $DH \perp AB$

(CH – проекция, DC – перпендикуляр).

DH – искомое расстояние.

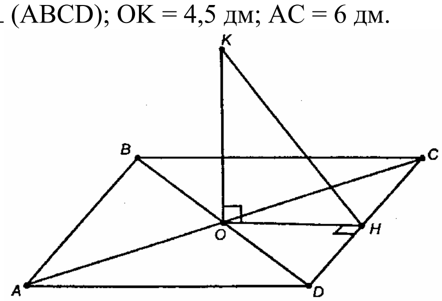
Из ΔABC: $CH = m \cdot \sin\varphi$ (соотношение в прямоугольном треугольнике).

В ΔDCH: $DH = \sqrt{DC^2 + CH^2} = \sqrt{n^2 + m^2 \sin^2 \varphi}$.

Ответ: $\sqrt{n^2 + m^2 \sin^2 \varphi}$.

157.

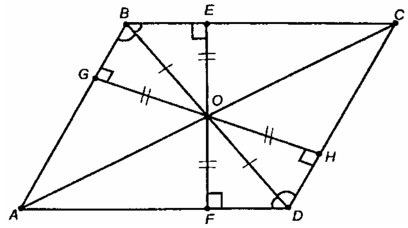
Дано: OK $\perp$ (ABCD); OK = 4,5 дм; AC = 6 дм.



Решение:

В (ABCD) проведем через т. O EF $\perp$ AD, OH $\perp$ CD.

Диагонали ромба, во-первых, являются биссектрисами его углов; во-вторых, в точке пересечения делятся пополам. Следовательно, $\Delta OBE = \Delta OBG = \Delta ODH = \Delta ODF$, отсюда $OF = OE = OG = OH$, утверждение а) доказано. Оно следует из равенства треугольников. (KO – общий катет, $\Delta KOG = \Delta KOE = \Delta KOH = \Delta KOF$, отсюда $KG = KE = KH = KF$).



В ΔAOD: $AO = 3$ дм. $OD = 4$ дм. $S_{AOD} = \frac{1}{2} AO \cdot OD = 6$ дм^2.

С другой стороны, $S_{AOD} = \frac{OF \cdot AD}{2}$.

$$AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ дм}.$$

$$S_{AOD} = \frac{1}{2} \cdot OF \cdot 5 = 6$$

Отсюда $OF = \frac{12}{5} = 2{,}4$ (дм).

$OF = OH = 2{,}4$ дм (из равенства ΔOFD и ΔOHD).

Из ΔKOH: $KH = \rho(K, DC) = \sqrt{KO^2 + OH^2}$;

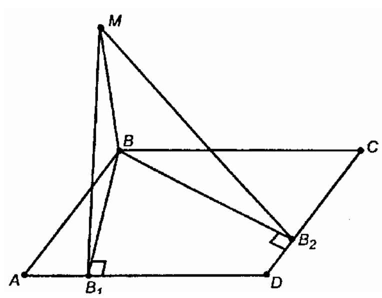
$$KH = \sqrt{4{,}5^2 + 2{,}4^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{2025+576}{100}} = \frac{\sqrt{2601}}{10} =$$

$= 5{,}1$ дм.

Ответ: б) $KH = 5{,}1$ дм.

158.

Дано: $ABCD$ – ромб; $BM \perp (ABCD)$; $AB = 25$ см; $\angle BAD = 60^\circ$; $BM = 12{,}5$ см.



Решение:

$MB \perp$ пл. $ABCD$, следовательно, $MB \perp AB$ и $MB \perp BC$, следовательно, $\rho(M, AB) = \rho(M, BC) = MB = 12{,}5$ (см).

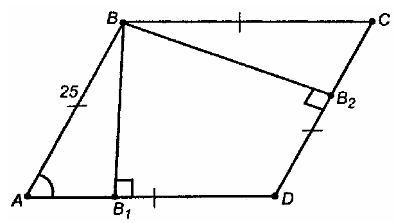
Проведем в пл. $ABCD$ отрезки $BB_1 \perp AD$ и $BB_2 \perp CD$.

По теореме о 3-х перпендикулярах $MB_1 \perp AD$ и $MB_2 \perp DC$.

$MB_1 = \rho(M, AD)$, $MB_2 = \rho(M, DC)$.

$\angle A = \angle C$, $AB = BC$, поэтому $\Delta AB_1B = \Delta CB_2B$ (т.к. $ABCD$ – ромб).

$BB_1 = BB_2 = 25 \cdot \sin 60^\circ = 25 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12{,}5\sqrt{3}$ (см)



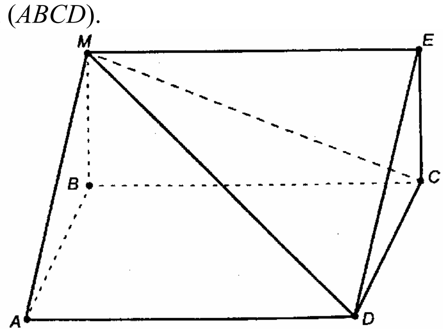
MB_2 и MB_1 – наклонные, их проекции (BB_1 и BB_2) равны, значит, и сами наклонные равны, то есть $MB_1 = MB_2$.

$$MB_1 = \sqrt{MB^2 + B_1B^2} = \sqrt{12{,}5^2 + 12{,}5^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2} = 25 \text{ (см)}.$$

Ответ: 12,5 см, 12,5 см, 25 см, 25 см.

159.

Дано: $BM \perp (ABCD)$.



Решение:

ME – линия пересечения плоскостей AMD и BCM. В плоскости AMD проводим $DE \parallel AM$. $AM \perp AD$ – по теореме о 3-х перпендикулярах, то $DE \perp AD$.

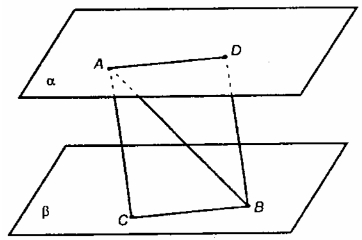
$AD \perp MB$, $AD \perp AB$, то по теореме о 3-х перпендикулярах $AD \perp$ пл. AMB. Отсюда следует, что $ME \perp$ пл. AMB (т.к. $ME \parallel AD$).

Что и требовалось доказать.

160.

Дано: $\rho(\alpha; \beta) = d$; $d < AB$; $AB = 13$ см; $d = 5$ см.

Решение

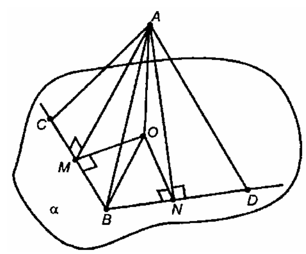


Проведем $BD \perp \alpha$ и $AC \parallel BD$. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны: $AC = DB$. К тому же $DB \parallel AC$ и $BD \perp \alpha$, $BD \perp \beta$, $AC \perp \alpha$ и $AC \perp \beta$. Значит, $d = AC = DB = \rho(\alpha, \beta)$. $ABCD$ – прямоугольник (AC и BD лежат в одной плоскости).

$CB = \sqrt{AB^2 - d^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

161.



Дано: $BA \in (CBD)$; $\angle ABC = \angle ABD$; $\angle ABC < 90^\circ$.

Решение:

Проведем $AO \perp \alpha$.

В пл. α проведем $OM \perp CB$ и $ON \perp BD$.

По теореме о 3-х перпендикулярах $AM \perp CB$ и $AN \perp BD$.

$\Delta ABM = \Delta ABN$. Поэтому $MB = NB$.

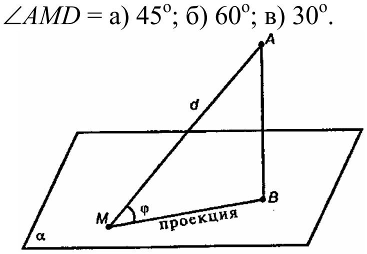
Проведем в пл. α отрезок OB. Рассмотрим ΔOBM и ΔOBN.

У них сторона OB – общая, $BM = BN$ (см. выше), оба треугольника– прямоугольные. Следовательно, $\Delta OBM = \Delta OBN$, $\angle OBM = \angle OBN$ и проекция OB наклонной BA является биссектрисой $\angle CBD$.

Что и требовалось доказать.

163.

Дано: $AM = d$; $\angle AMD =$ а) 45°; б) 60°; в) 30°.



Решение:

а) $MB = d\cos\varphi = d - \cos 45^\circ = \dfrac{d\sqrt{2}}{2}$;

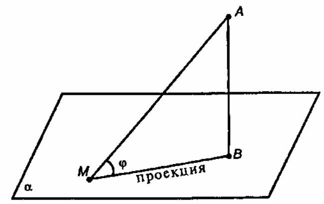
б) $MB = d\cos 60^\circ = d \cdot \frac{1}{2} = \frac{d}{2}$;

в) $MB = d\cos 30^\circ = d \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{d\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: а) $\frac{d\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{d}{2}$; в) $\frac{d\sqrt{3}}{2}$.

164.

Дано: $AM = 2MB$.



Решение:

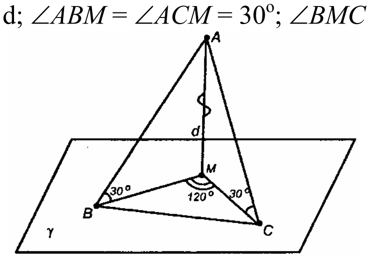
По условию $MB = \frac{1}{2}MA$.

Из соотношений в прямоугольном треугольнике следует, что $\frac{MB}{MA} = \cos\varphi$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Ответ: 60°.

165.

Дано: $\rho(A;\gamma) = d$; $\angle ABM = \angle ACM = 30^\circ$; $\angle BMC = 120^\circ$.



Решение:

$\Delta AMC = \Delta AMB$, $BM = MC = d\text{ctg}30^\circ = d\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3}d$.

Теорема косинусов для ΔBMC:

$BC^2 = BM^2 + MC^2 - 2BM \cdot MC \cdot \cos 120^\circ$;

$BC^2 = 3d^2 + 3d^2 - 2d^2 \cdot 3\cos 120^\circ = 6d^2 + 6d2\cos 60^\circ = 9d^2$;

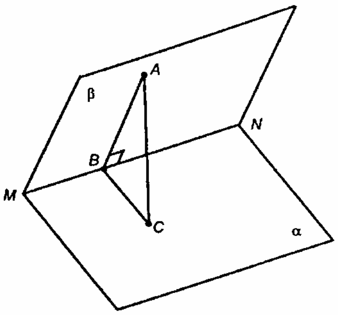
$BC = \sqrt{9d^2} = 3d$.

Ответ: $3d$.

166.

Дано: α не параллельна β; $\alpha \cap \beta = MN$; $AB \perp MN$; $AC \perp \alpha$.

Решение:



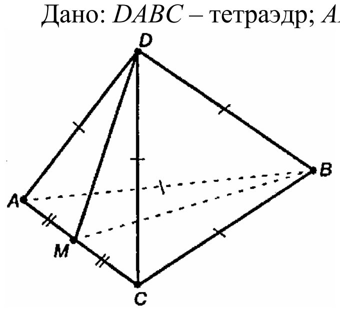
Проведем отрезок BC.

$AC \perp \alpha$, AB – наклонная, $AB \perp MN$, то по теореме, обратной к теореме о 3-х перпендикулярах, $BC \perp MN$.

$B \in MN$; $BA \perp MN$; $BC \perp MN$, то отсюда заключаем, что $\angle ABC$ – линейный угол двугранного угла $AMNC$ (это следует из определения).

167.

Дано: $DABC$ – тетраэдр; $AM = MC$.



Решение:

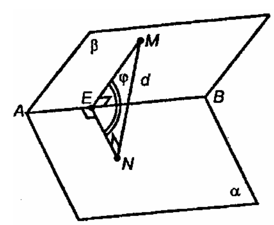
ΔADC – равносторонний, DM – медиана, следовательно, $DM \perp AC$ (т.к. DM еще и высота).

ΔABC – равносторонний, BM – медиана, следовательно, $BM \perp AC$ (т.к. BM – высота ΔABC).

$\angle DMB$ – линейный угол двугранного угла $BACD$ (по определению).

Что и требовалось доказать.

168.



Решение:

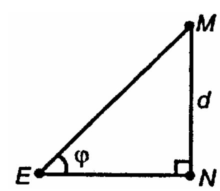
Известно, что $M \in \beta$, $\rho(M, \alpha) = d$.

$MN \perp \alpha$ – по условию (расстояние есть длина перпендикуляра).

В пл. α проводим $NE \perp AB$;

$MN \perp \alpha$, $NE \perp AB$, то по теореме о 3-х перпендикулярах $EM \perp AB$, значит, $\rho(M, AB) = ME$.

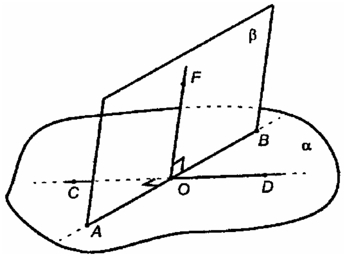
Т.о. $\angle MEN$ – линейный угол двугранного угла $MABN$, $\angle MEN = \varphi$ (по условию).



$ME = \dfrac{d}{\sin\varphi}$ (из соотношений в прямоугольном треугольнике).

Ответ: $\dfrac{d}{\sin\varphi}$.

169.



Решение:

Пусть α и β пересекаются по AB.

Выберем произвольную т. $O \in AB$.

В пл. α проведем прямую CD через т. O так, чтобы $CD \perp AB$.

В пл. β проведем луч OF так, чтобы $OF \perp AB$.

Двугранному углу $DABF$ соответствует линейный угол FOD; двугранному углу $CABF$ соответствует линейный угол FOC.

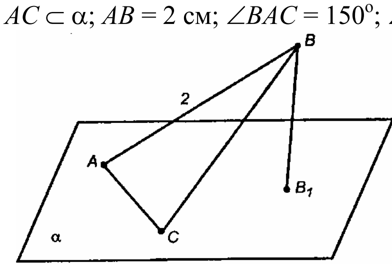
Углы FOD и FOC – смежные, $\angle FOD + \angle FOC = 180^\circ$.

Сумма двугранных углов $DABF$ и $CABF$ равна 180°.

Что и требовалось доказать.

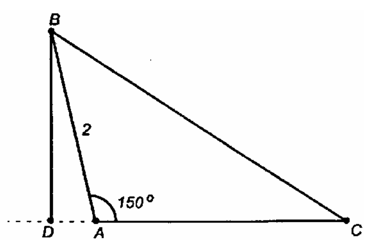
170.

Дано: ΔABC; $AC \subset \alpha$; $AB = 2$ см; $\angle BAC = 150^\circ$; $\angle BACB_1 = 45^\circ$.



Решение

Проведем $BD \perp AC$. По теореме о 3-х перпендикулярах $BD \perp AC$.



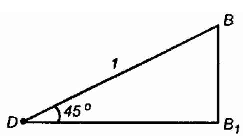
$\angle BAC = 150^\circ$.

$\rho(B, AC) = BD$.

$\angle BAD = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$,

$BD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ (см).

По условию $\angle B_1DB = 45^\circ$, так как $\angle B_1DB$ – линейный угол двугранного угла $BACB_1$.

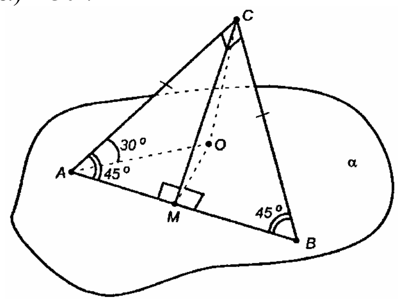


Т.о. $\rho(B, \alpha) = BB_1 = DB \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (см).

Ответ: $\rho(B, AC) = 1$ см, $\rho(B, \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ см.

171.

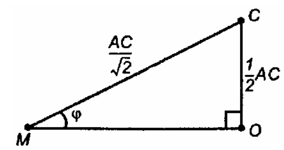
Дано: $\angle(AC; \alpha) = 30^{\circ}$.



Решение:

Проведем $CO \perp \alpha$; проведем отрезки OA и OB.

$\angle OAC = 30^{\circ}$ (по условию), т.к. это и есть угол между катетом и плоскостью α.



$CO = \dfrac{1}{2}AC$ (катет, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы).

Проведем $OM \perp AB$.

$CO \perp AB$, $OM \perp AB$, то по теореме о 3-х перпендикулярах $CM \perp AB$.

Из ΔAMC: $CM = CA \cdot \sin 45^{\circ} = \dfrac{CA}{\sqrt{2}}$

$\angle CMO$ – линейный угол двугранного угла.

$\angle(\alpha; (ABC))$.

ΔMCO – прямоугольный, т.е. $\angle COM = 90^{\circ}$.

$\sin\varphi = \dfrac{OC}{MC}$; $\sin\varphi = \dfrac{AC}{2} : \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\varphi = 45^{\circ}$ ($\varphi \neq 135^{\circ}$, так как ΔCMO – прямоугольный).

Ответ: 45°.

172.

Дано: $AC \subset \alpha$; ΔABC, $\angle C = 90^{\circ}$; $\angle(\alpha; (ABC)) = 60^{\circ}$; $AC = 5$ см; $AB = 13$ см.

Решение:

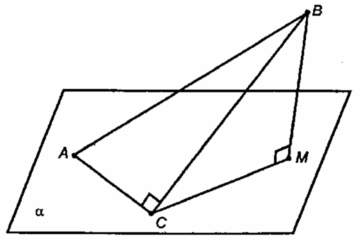
Проведем $BM \perp \alpha$.

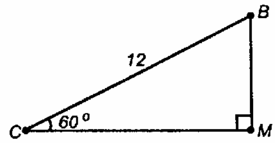
$BM \perp \alpha$, BC – наклонная, $AC \perp BC$, то по теореме, обратной к теореме о 3-х перпендикулярах, $AC \perp MC$.

$\angle BCM$ – линейный угол двугранного угла $BACM$. По условию он равен 60°.

$\rho(B, \alpha) = BM$.

Из ΔABC: $BC = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).



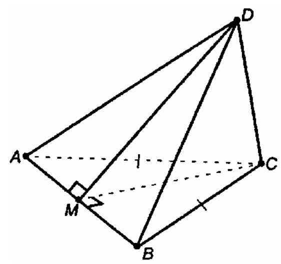


$BM = 12\sin 60^\circ = 6\sqrt{3}$ (см).

Ответ: $6\sqrt{3}$ см.

173.

Дано: $ABCD$ – тетраэдр; $CD \perp (ABC)$; $AB=BC = AC = 6$; $BD = 3\sqrt{7}$.



Определим линейную меру двугранного угла $DACB$.

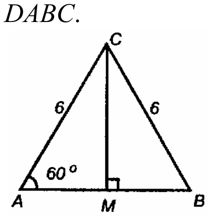
$ADC \perp$ пл. ABC, тогда двугранный угол $DACB$ и соответствующий ему линейный угол DCB равны 90°.

Определим линейную меру двугранного угла $DABC$.

Проведем отрезок $CM \perp AB$, соединим точки M и D.

$DC \perp AB$, $CM \perp AB$, то по теореме о 3-х перпендикулярах, $AB \perp DM$.

По определению, $\angle DMC$ – линейный угол двугранного угла $DABC$.



$CM = AC = \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$;

$MB = AM = \dfrac{1}{2} AC = \dfrac{1}{2} \cdot 6 = 3$.

По теореме Пифагора:

$DC = \sqrt{BD^2 - BC^2} = \sqrt{63 - 36} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

Тогда $\text{tg}\angle DMC = \dfrac{DC}{CM} = 1$.

Отсюда $\angle DMC = 45^\circ$.

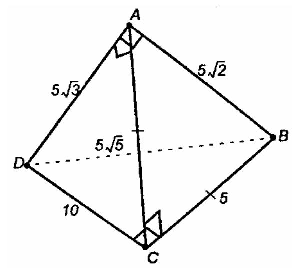
Определим линейную меру двугранного угла $BDCA$.

$BC \perp DC$, $AC \perp DC$, то $\angle ABC$ – линейный угол двугранного угла $BDCA$, $\angle ACB = 60^\circ$.

Ответ: 90°, 45°, 60°.

174.

Дано: $ABCD$; $AC=CB = 5$; $DB = 5\sqrt{5}$.



Решение:

Построим линейный угол двугранного угла $ABCD$.

$AC \perp CB$ по условию, следовательно, надо найти еще один отрезок, перпендикулярный CB.

Нам по условию даны несколько прямоугольных треугольников; подсчитаем остальные ребра тетраэдра по теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2};$$

$$AD = \sqrt{DB^2 - AB^2} = 5\sqrt{3}; \ DB = \sqrt{AD^2 + AB^2} = 5\sqrt{5};$$

$$DC = \sqrt{AC^2 + DA^2} = \sqrt{5^2 \cdot 3 + 5^2} = 10.$$

Заметим, что в ΔDBC $DB^2 = DC^2 + BC^2$. То есть $\angle DCB = 90^{\circ}$.

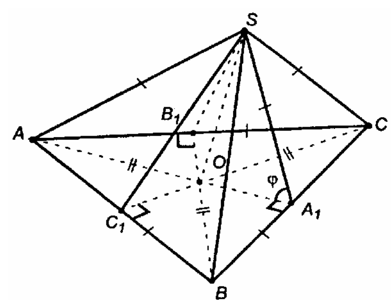
$BC \perp AC$, $BC \perp DC$, то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $BC \perp$ пл. ADC, следовательно, $\angle ACD$ – линейный угол двугранного угла $ABCD$.

$\cos\angle ACD = \dfrac{AC}{DC} = \dfrac{1}{2}$, отсюда $\angle$ACD = $\arccos\dfrac{1}{2} = 60^{\circ}$ (т.к. угол острый).

Ответ: 60°.

175.

Решение:



Построим $SO \perp$ пл. ABC.

SA, SB, SC – наклонные, а равные наклонные имеют равные проекции, поэтому $AO=BO = CO$; поэтому в пл. ABC $AO = R$, R – радиус описанной окружности.

ΔABC – правильный; продолжим AO, CO и BO до пересечения их со сторонами треугольника.

$BB_1 \perp AC$, $CC_1 \perp AB$, $AA_1 \perp BC$ (из свойств правильного треугольника).

Соединим точки S и B, A_1 и S, C_1 и S.

$\angle SB_1O$ – линейный угол двугранного угла $SACB$.

$\angle SC_1O$ – линейный угол двугранного угла $SABC$.

$\angle SA_1O$ – линейный угол двугранного угла $SBCA$ (по определению).

$\Delta OB_1S = \Delta OC_1S = \Delta OA_1S$ – по двум катетам ($OB_1 = OC_1 = OA_1 = r$, r – радиус вписанной окружности в ΔABC, SO – общий катет), $\angle SB_1O = \angle SC_1O = \angle SA_1O$ (из равенства треугольников).

Раз все ребра тетраэдра равны, то доказанное выше справедливо и для всех двугранных углов.

Поэтому все двугранные углы равны.

Отыщем один из линейных углов двугранного угла, например, $\angle SA_1O$ двугранного угла $SBCA$.

Пусть a – ребро тетраэдра, то имеем

ΔBSC: $SA_1 = a\sin 60^\circ = a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

ΔABC: $OA_1 = \dfrac{1}{3}AA_1 = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$;

ΔSA_1O: $\cos\varphi = \dfrac{OA_1}{SA_1}$; $\cos\varphi = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} : \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{3}$.

φ – острый угол.

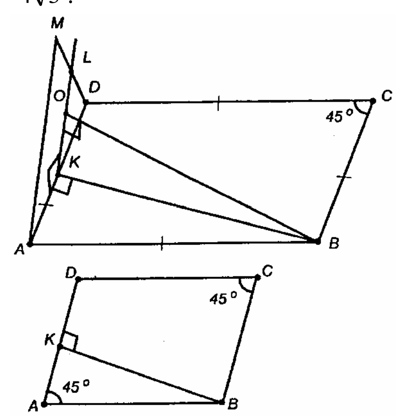
Отсюда: $\varphi = \arccos\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\varphi = \arccos\dfrac{1}{3}$.

176.

Дано: $ABCD$ – ромб; $\angle(BADM) = 60^\circ$; $\angle BAD = 45^\circ$;

$\rho(B; (ADM)) = 4\sqrt{3}$.



Решение:

Построим $BK \perp AD$.

В пл. ADM проведем $KL \perp AD$.

$\angle BKL$ – линейный угол двугранного угла $BADM$. $\angle BKL = 60^\circ$ (по условию).

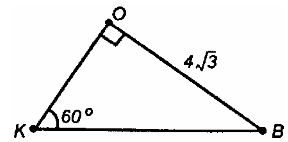
В пл. BKL опустим на KL перпендикуляр BO.

Докажем, что $BO \perp$ пл. ADM.

а) $AD \perp BK$, $AD \perp KL$, то $AD \perp$ пл. BKL, следовательно, AD перпендикулярна всем прямым в плоскости BKL, то есть $AD \perp BO$.

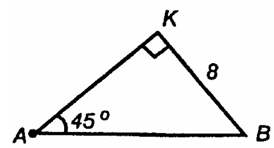
б) $BO \perp AD$, $BO \perp KL$, то $BO \perp$ пл. AMD.

Итак, $\rho(B$, пл. $AMD) = 4\sqrt{3} = BO$.



$$BK = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 8.$$

В пл. $ABCD$



$$AB = BK \cdot \frac{1}{\sin 45^\circ};$$

$$AB = 8\sqrt{2}.$$

Ответ: $AB = 8\sqrt{2}$.

177.

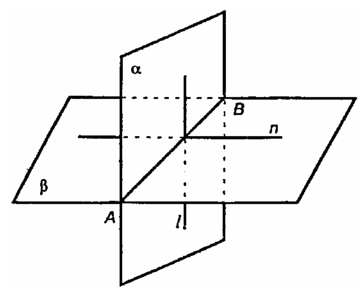
Решение:

Пусть α и β пересекаются по линии AB, $\gamma \perp AB$ (на рисунке не показана).

$AB \perp \gamma$, $AB \subset \alpha$, то по теореме п. 23 $\gamma \perp \alpha$.

$AB \perp \gamma$, $AB \subset \beta$, то по теореме п. 23 $\gamma \perp \beta$.

Что и требовалось доказать.



179.

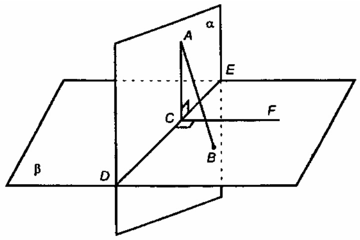
Дано: α, β, $\alpha \perp \beta$.

Решение:

Пусть $AB \not\subset \alpha$ (где AB – перпендикуляр β, проведенный через $A \in \alpha$).

DE – линия пересечения α и β.

Проведем в пл. α $AC \perp DE$, а в пл. β (через построенную т. C) $CF \perp DE$.



$\angle ACF$ – линейный угол двугранного угла $ADEF$, $\angle ACF = 90^\circ$.

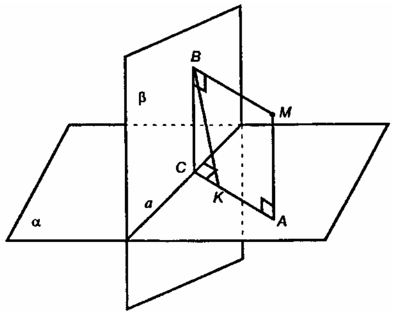
$AC \perp DE$, $AC \perp CF$, то $AC \perp$ пл. β.

Из точки A проведены 2 различных перпендикуляра к пл. β, что невозможно.

Наше допущение неверно, $AB \subset \alpha$.

Что и требовалось доказать.

181.



Дано: $\alpha \cap \beta = a$; $MA \perp \alpha$; $MB \perp \beta$; $a \cap (AMB) = C$.

Решение:

$MB \perp a$, $MA \perp \alpha$, то пл. $AMB \perp a$ и пл. $AMB \perp \beta$, $AMB \perp \alpha$.

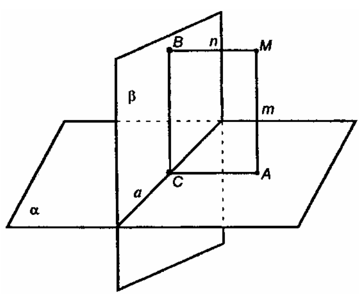
Построим точку C:

проведем $BK \perp \alpha$ и достроим отрезок AK до пересечения его с прямой a в т. C (через $BK \parallel MA$ проходит единственная плоскость $BKAM$, перпендикулярная к α и β). Т. C – искомая.

$a \perp$ пл. AMB, $MC \subset$ пл. AMB, то $a \perp MC$, т.к. a перпендикулярна всем прямым, лежащим в пл. AMB.

Что и требовалось доказать.

182.



Дано: $\alpha \perp \beta$; $\alpha \cap \beta = a$; $MA \perp \alpha$; $MB \perp \beta$; $AM = m$; $BM = n$.

Решение:

В α проведем $AC \parallel MB$; в β проведем отрезок BC.

$AM \parallel BC$.

$BM \parallel AC$, $AM \parallel BC$, 4-угольник $ACBM$ – параллелограмм.

Раз $MA \perp \alpha$, то $\angle MAC = 90^\circ$.

$ACBM$ – прямоугольник.

Раз $MB \perp \beta$, то $MB \perp a$, и поскольку $MA \perp \alpha$, то $MA \perp a$. Отсюда пл. $AMB \perp a$.

$a \perp$ пл. AMB;

$MC \subset$ пл. AMB, отсюда $a \perp MC$, $r(M, a) = MC$.

По теореме Пифагора: $MC = \sqrt{MA^2 + AC^2} = \sqrt{m^2 + n^2}$.

Ответ: $MC = \sqrt{m^2 + n^2}$.

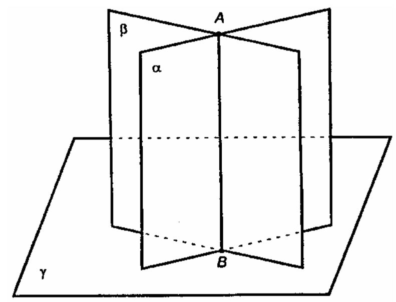
183.

Дано: $\alpha \cap \beta = a$; α; $\beta \perp \gamma$.

Решение:

Докажем следующее:

если две плоскости (α и β) взаимно перпендикулярны и к одной из них (к β) проведен перпендикуляр (AB), имеющий общую т. (A) с другой плоскостью (α), то этот перпендикуляр весь лежит в этой плоскости (α).



Это утверждение доказано в задаче 179.

Выберем произвольную т. A на линии пересечения α и β.

Проведем перпендикуляр к пл. γ.

По доказанному выше, этот перпендикуляр должен принадлежать и пл. α и пл. β, то есть он сливается с линией пересечения плоскостей, то есть с AB.

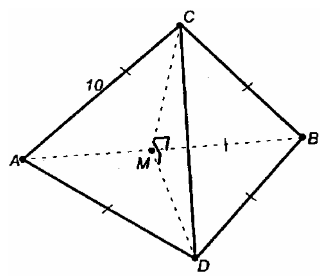
Утверждение доказано.

184.

Дано: $AB = 10$ см; ΔABC; ΔABD.

Решение:

а)



Построим $CM \perp AB$ и отрезок MD.

В равностороннем ΔABC: CM – высота, значит, и медиана, $AM = MB = 5$ см.

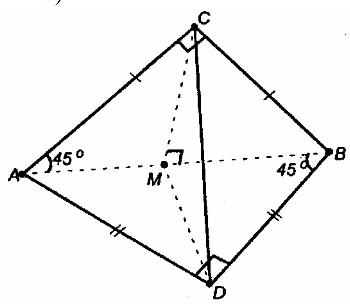
В ΔABD: DM – медиана и высота, то есть $MD \perp AB$.

$\angle CMD$ – линейный угол внутреннего угла $CABD$, $\angle CMD = 90^\circ$.

$CM = 10\sin 60^{\circ} = 5\sqrt{3}$, $MD = 5\sqrt{3}$ (см);

$CD = 5\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} = 5\sqrt{6}$ (см) (по теореме Пифагора для ΔCMD).

б)



Построим $CM \perp AB$; CM – высота и медиана в равнобедренном ΔACB; проводим отрезок DM, DM – медиана в равнобедренном ΔABD, следовательно, и высота, $MD \perp AB$.

Очевидно, $CM = AM = 5$ см, $MD = 5$ см, $CD = 5\sqrt{2}$ см (по т. Пифагора для ΔCMD).

Ответ: а) $5\sqrt{6}$ см; б) $5\sqrt{2}$ см.

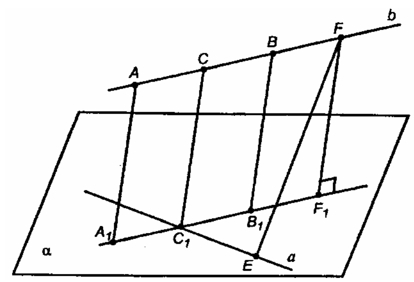
185.

Задача решена в учебнике на стр. 52.

186.

Решение:

По условию даны скрещивающиеся прямые a и b. Построим прямую, пересекающую обе данные прямые и перпендикулярную к ним.



Проведем через прямую a. $\alpha \parallel b$. Из произвольных точек $A \in b$, $B \in b$ проведем $AA_1 \perp \alpha$ и $BB_1 \perp \alpha$. Соединим A_1 и B_1 отрезком и найдем точку C_1 пересечения прямых A_1B_1 и a. Через т. C_1 проведем прямую, перпендикулярную α. Эта прямая:

1) пересекается с прямой b в некоторой точке C (плоскости A_1ABB_1 и α взаимно перпендикулярны; через т.$C_1 \in$ пл. A_1ABB_1 проведена прямая, перпендикулярная α. Эта прямая будет лежать в пл. A_1ABB_1 (Это доказано в задаче 179). Эта прямая $C_1C \parallel A_1A \parallel B_1B$. C_1C пересечет b);

2) $C_1C \perp a$, $C_1C \perp b$ (раз $C_1C \perp \alpha$, то $C_1C \perp a$, $b \parallel \alpha$; по теореме II $A_1A \parallel b$. Раз $C_1C \perp \alpha$, то $C_1C \perp A_1B_1$ и $C_1C \perp b$).

Прямая C_1C – искомая.

Отрезок C_1C меньше всех других отрезков, которые можно получить, соединяя точки прямой a с точками прямой b. Например, возьмем т. $E \in a$, т. $F \in b$, проведем отрезок EF и докажем, что $EF > C_1C$.

Проведем $FF_1 \perp \alpha$. Тогда $FE > FF_1$. Но $FF_1 = C_1C$, следовательно, $EF > C_1C$.

Вывод: C_1C – единственная, т.к. все остальные отрезки длиннее CC_1, поэтому не могут являться общим перпендикуляром к a и b (т.к. это кратчайшее расстояние).

Что и требовалось доказать.

187.

Дано: а) 1, 1, 2; б) 8, 9, 12; в) $\sqrt{39}$, 7, 9.

Решение

По теореме п. 24 имеем:

а) $d_1 = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$;

б) $d_2 = \sqrt{8^2 + 9^2 + 12^2} = \sqrt{64 + 81 + 144} = 17$;

в) $d_3 = \sqrt{39 + 49 + 81} = 13$.

Ответ: а) $\sqrt{6}$; б) 17; в) 13.

188.

Решение:

$d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \cdot 3} = a\sqrt{3}$.

Ответ: $a\sqrt{3}$.

189.

Решение:

Пусть $\rho(A_1$, пл. $ABCD) = \rho(A_1$, пл. $BB_1C_1C) = \rho(A_1$, пл. $DD_1C_1C) = x$.

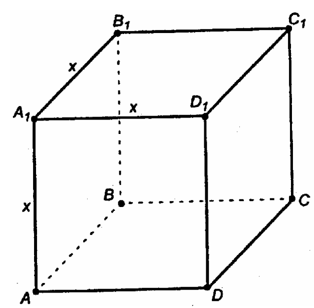
а) По т. Пифагора:

$x^2 + x^2 = m^2$, $x = \dfrac{m\sqrt{2}}{2}$.

б) $d^2 = x^2 + x^2 + x^2$ (по т. Пифагора).

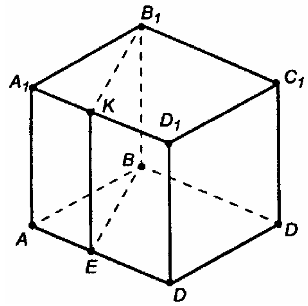
Отсюда: $x = \dfrac{d\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: а) $\dfrac{m\sqrt{2}}{2}$; б) $\dfrac{d\sqrt{3}}{3}$.



190.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



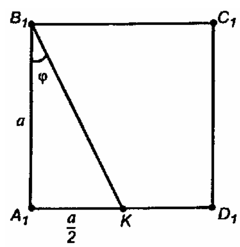
Решение:

а) $\angle A_1B_1C_1$ – линейный угол двугранного угла ABB_1C, $\angle A_1B_1C_1$ = =90°, т.к. данная фигура – куб.

б) Надо найти угол между плоскостями AA_1D_1D и BDD_1B_1.

$\angle ADB$ – линейный угол двугранного угла ADD_1B; $\angle ADB = 45°$.

в) Проведем B_1K; проведем $KE \parallel AA_1$; проведем диагональ квадрата BE. Требуется найти линейную меру двугранного угла между плоскостями AA_1B_1B и KB_1BE. $A_1B_1 \perp BB_1$, $B_1K \perp BB_1$.

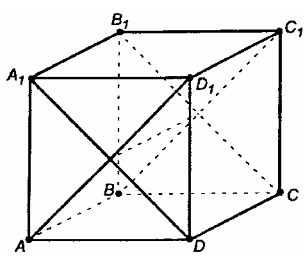


Таким образом, $\angle A_1B_1K$ – линейный угол двугранного угла ABB_1K.

Пусть ребро куба равно a, тогда $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

Ответ: а) 90°; б) 45°; в) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

191.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

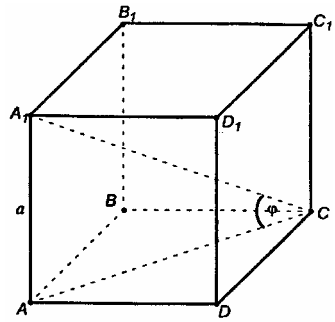
Решение:

Используя известные свойства куба, можем заключить, что $A_1D \perp AD_1$, $A_1D \perp AB$, $A_1D \perp$ пл. ABC_1D_1.

По теореме п. 23 плоскости ABC_1D_1 и DA_1B_1C взаимно перпендикулярны.

Что и требовалось доказать.

192.



Решение:

У куба все углы между диагональю и гранями одинаковы. Найдем, например, угол между диагональю A_1C и пл. ABCD, все остальные будут ему равны.

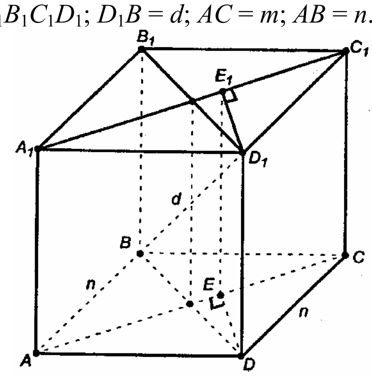
Из прямоугольного ΔAA_1C

$$tg\varphi = \frac{AA_1}{AC} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

193.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$; $D_1B = d$; $AC = m$; $AB = n$.



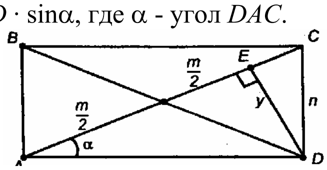
Решение:

а) $\rho(A_1C_1$, пл. $ABC) = AA_1 = x$.

$d^2 = BD^2 + DD_1^2 = AC^2 + x^2$.

б) ρ(пл. ABB_1, пл. $DCC_1) = AD$, $AD = \sqrt{m^2 - n^2}$ (по т. Пифагора).

в) Проведем $D_1E_1 \perp A_1C_1$ и $DE \perp AC$. $\rho(DD_1$, пл. $ACC_1) = DE = y$.
Из ΔAED: $y = AD \cdot \sin\alpha$, где α - угол DAC.



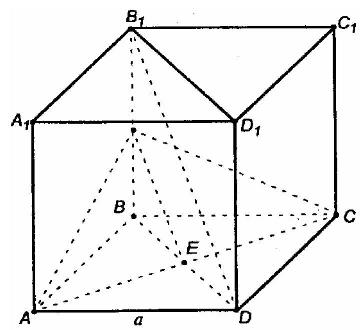
$\sin\alpha = \dfrac{CD}{AC} = \dfrac{n}{m}$, $AD = \sqrt{m^2 - n^2}$;

Подставляя эти выражения в предыдущее равенство:

$$y = \frac{n\sqrt{m^2 - n^2}}{m}.$$

Ответ: а) $\sqrt{d^2 - m^2}$; б) $\sqrt{m^2 - n^2}$; в) $\dfrac{n\sqrt{m^2 - n^2}}{m}$.

194.



Решение:

а) Найдем, например, $\rho(AA_1, B_1D)$.

$AA_1 \parallel DD_1$, поэтому $AA_1 \parallel$ пл. BB_1D_1D. Проводим $AE \perp BD$.

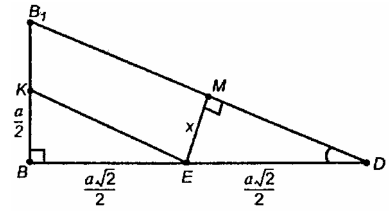
Важно заметить, что в силу свойств куба точка E будет серединой BD, то есть центром нижней грани куба.

$AE \perp BD$, $AE \perp D_1D$, то $AE \perp BB_1D_1D$.

$$\rho(AA_1, B_1D) = AE,\ AE = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

б) Проводим через AC плоскость, параллельную B_1D. Для этого проведем в плоскости BB_1D прямую $EK \parallel B_1D$. Соединим A и K, C и K; пл. $AKC \parallel B_1D$ по теореме I.

Рассмотрим BB_1D.



$BB_1 = a,\ BD = a\sqrt{2}$.

KE – средняя линия в ΔBB_1D. Искомое расстояние $x = EM$, $EM \perp B_1D$ по построению.

$B_1D = \sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{3}$.

В ΔB_1BD $\sin\angle B_1DB = \dfrac{B_1B}{B_1D} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

в ΔMDE: $\sin\angle MDE = \dfrac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2x}{a\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}x}{a}$.

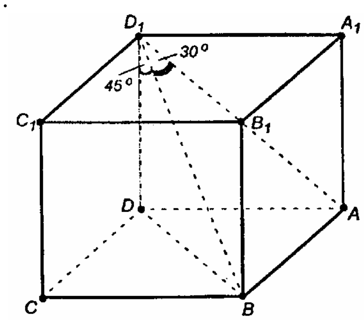
Получим уравнение:

$\dfrac{\sqrt{2}x}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, отсюда $x = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

Ответ: а) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; б) $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

195.

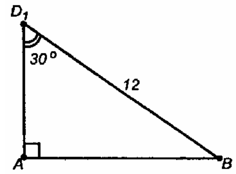
Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$; $AC = 12$ см; $\angle(BD_1, (AA_1D_1D)) = 30^\circ$; $\angle(BD_1, DD_1) = 45^\circ$.



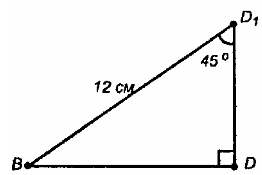
Решение:

$AB \perp$ пл. AA_1D_1D, поэтому отрезок AD_1 есть проекция BD_1 на плоскость грани AA_1D_1D.

Так как диагонали прямоугольного параллелепипеда равны, то $D_1B = AC_1 = 12$ см.

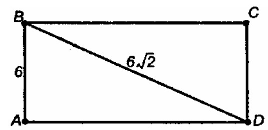


$AB = 6$ см (т.к. он лежит против угла 30°, то равен половине гипотенузы).



Из ΔBDD_1 – прямоугольного:

$BD = D_1D = 12\sin45^\circ = 6\sqrt{2}$ (см); $D_1D = 6\sqrt{2}$ см.



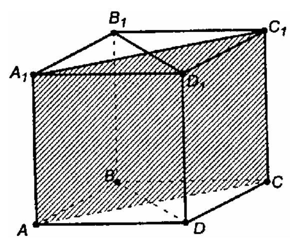
По теореме Пифагора:

$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{6^2 \cdot 2 - 6^2} = 6$ (см);

$AD = 6$ см.

Ответ: 6 см, 6 см, $6\sqrt{2}$ см.

196.



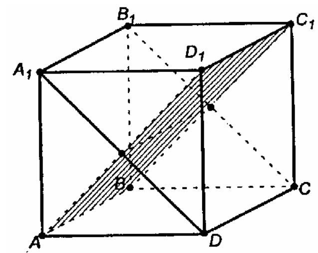
Решение:

а) $AC \perp BD$ – по свойству диагоналей квадрата (они перпендикулярны).

$$\left.\begin{array}{l} AC \perp BD \\ AC \perp D_1D \end{array}\right\} \to AC \perp \text{пл. } BB_1D_1D.$$

Так как пл. AA_1C_1C проходит через AC, то пл. $AA_1C_1C \perp$ пл. BB_1D_1D. Плоскость AA_1C_1C – искомое сечение.

б)



$DA_1 \perp AD_1$, $DA_1 \perp AB$, то $A_1D \perp$ пл. AD_1B.

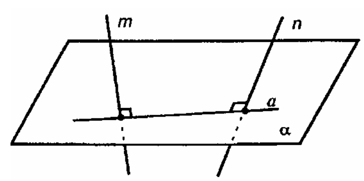
Плоскости ABC_1D_1 и A_1B_1CD – перпендикулярны (т.к. A_1B_1CD проходит через прямую $A_1D \perp$ пл. AD_1B).

4-угольник ABC_1D_1 – искомое сечение.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ II

1.

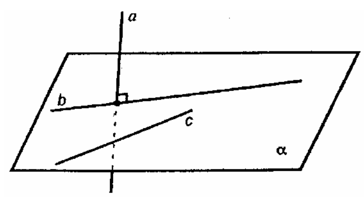
В пространстве – утверждение неверно; в плоскости- утверждение справедливо.



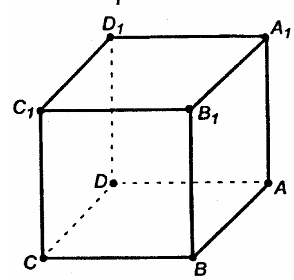
2.

а) Нет;

б) нет. Пример изображен на рисунке ниже:



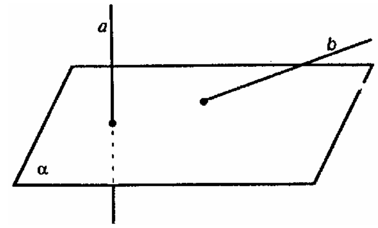
$A_1B_1 \perp BC$, однако A_1B_1 не пересекает пл. $ABCD$.



3.

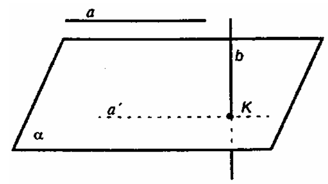
Если $a \| b$, то, поскольку $a \perp \alpha$ то и $b \perp \alpha$, но по условию b не перпендикулярна α.

Ответ: нет.

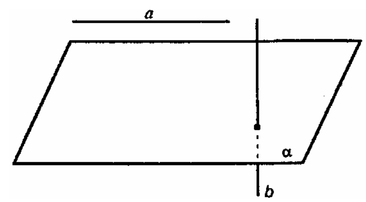


4.

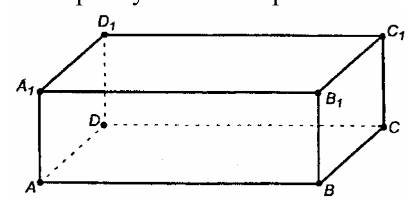
Да. Пусть K – точка пересечения b и α. Параллельно перенесем прямую a так, чтобы она прошла на пл. α через т. K: $K \in a'$, $a' \| a$. Раз $b \perp \alpha$, то $b \perp a'$. Отсюда заключаем, что $b \perp a$.



5.



Да, существует. В прямоугольном параллелепипеде:



$A_1B_1 \|$ пл. $ABCD$, $BB_1 \perp$ пл. $ABCD$, а $B_1C_1 \perp A_1B_1$ и $B_1C_1 \perp B_1B$.

6.

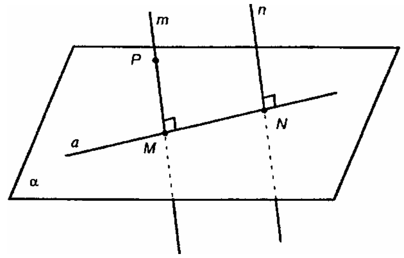
Пусть $m \perp \alpha$, $n \perp \alpha$; $M \in a$, $N \in$ a.

Раз $m \perp \alpha$, $n \perp \alpha$, то $m \| n$.

Пусть $P \in m$. Если плоскость (PMN) проходит через перпендикуляр (PM) к другой плоскости (α), то она перпендикулярна к этой плоскости. Итак, пл. $PMN \perp \alpha$.

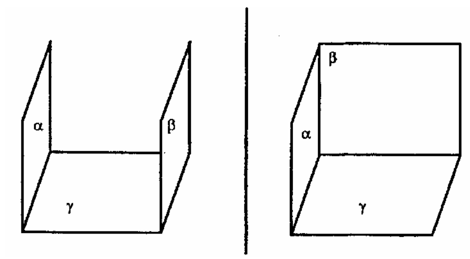
Если две плоскости (PMN и α) взаимно перпендикулярны и к одной из них (к α) проведен перпендикуляр (прямая n), имеющий общую точку (N) с другой плоскостью (PMN), то этот перпендикуляр весь лежит в плоскости (PMN).

Таким образом, любая прямая, перпендикулярная данной плоскости, лежит в плоскости PMN.



Ответ: верно.

7.



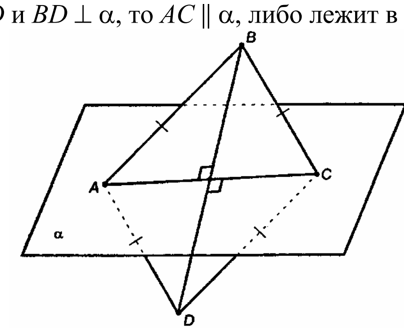
а) да; б) да.
Ответ: а) да; б) да.

8.

Можно. Пример – вершина куба.

9.

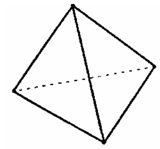
Т.к. $AC \perp BD$ и $BD \perp \alpha$, то $AC \parallel \alpha$, либо лежит в ней.



Ответ: параллельно плоскости, или лежит в плоскости.

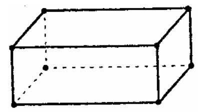
10.

а)



Тетраэдр имеет 6 двугранных углов (по одному при каждом ребре).

б)



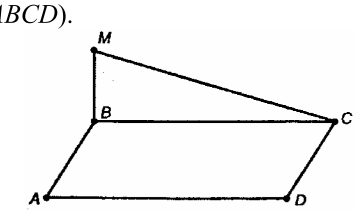
Параллелепипед имеет 12 двугранных углов (по одному при каждом ребре).

Ответ: а) 6; б) 12.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ II

197.

Дано: $BM \perp (ABCD)$.



Решение:

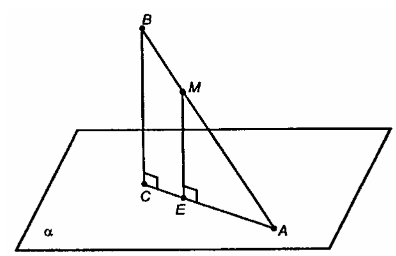
$CD \perp BC$, $CD \perp MB$, то $CD \perp$ пл. MBC.

Что и требовалось доказать.

198.

Дано: $A \in \alpha$; $\rho(B, \alpha) = 9$ см; $MA : MB = 4 : 5$.

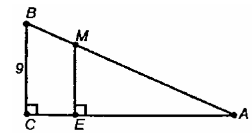
Решение:



1. Проведем $BC \perp \alpha$ и CA, $BC \perp CA$, раз $BC \perp \alpha$; пл. $ABC \perp \alpha$ (т.к. проходит через прямую, перпендикулярную α).

2. Из т. M проводим $ME \perp \alpha$, $ME \subset$ пл. ABC (согласно известному утверждению).

3. Решим планиметрическую задачу:



$\Delta ABC \sim \Delta AME$;

$\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{ME}$; $\frac{AB}{AM} = \frac{AM + MB}{AM} = 1 + \frac{BM}{AM} = \frac{9}{4}$;

$\frac{9}{4} = \frac{9}{ME}$, $ME = \frac{4 \cdot 9}{9} = 4$ (см).

Ответ: 4 см.

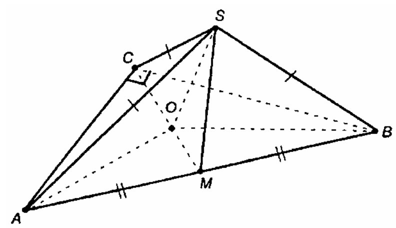
199.

Дано: $SA = SB = SC$.

Решение:

1. ΔASB – равнобедренный, SM – медиана, поэтому $SM \perp AB$ (это высота).

2. Проведем отрезок CM. в пл. SCM проведем $SO \perp CM$. Точку O соединим с вершинами A, B и C.



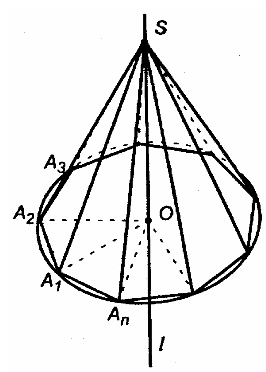
AS, BS, CS – равный наклонные, поэтому их проекции также равны, то есть $OA = OB = OC = R$, R – радиус описанной окружности около ΔABC.

Итак, $SM \perp$ пл. ABC.

Что и требовалось доказать.

200.

Решение:



Пусть $SO \perp \alpha$ – данная прямая, а α – плоскость многоугольника

Пусть на плоскости α имеется вписанный в окружность n-угольник (не обязательно правильный n-угольник); т. O – центр описанной окружности.

Рассмотрим ΔA_1OS, ΔA_2OS, …, ΔA_nOS. Они – прямоугольные, $OA_1 = OA_2 = \ldots = OA_n$ – как радиусы окружности, SO – общий катет. Все треугольники равны, поэтому наклонные SA_1, SA_2, …, SA_n тоже равны. Это суть утверждение задачи.

201.

Решение:

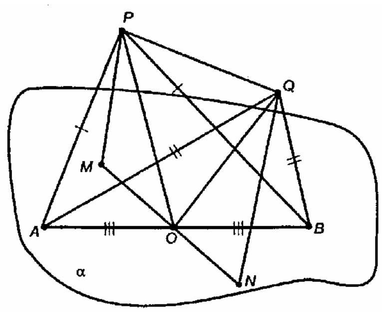
1. Проведем $PM \perp \alpha$ и $QN \perp \alpha$; через середину AB – точку O – проведем отрезки OQ и OP, соединим точки O и N, O и M.

$OQ \perp AB$ – по свойству медианы в равнобедренном ΔABQ.

$OP \perp AB$ – по свойству медианы в равнобедренном ΔABP.

$PM \perp AB$, $PQ \perp AB$, то $MO \perp AB$ по теореме, обратной к теореме о 3-х перпендикулярах;

$OQ \perp AB$, $QN \perp AB$, то $NO \perp AB$ по теореме, обратной к теореме о 3-х перпендикулярах.



В α через т. O к отрезку AB можно провести единственный перпендикуляр, поэтому точки M, O, N лежат на одной прямой MN.

$PM \parallel QN$, через них можно провести единственную плоскость $MPQN$, $AB \perp$ пл. $MPQN$.

Рассмотрим два случая:

Случай I. $PQ \parallel a$.

Тогда $PM = QN$, $MN \parallel PQ$ и угол между PQ и AB равен углу между MN и AB. А угол между MN и AB равен 90°.

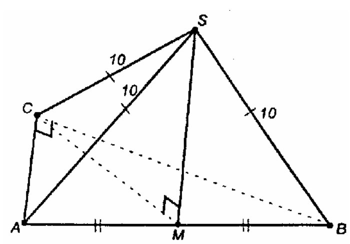
Случай II. Продолжение PQ пересекает плоскость α.

Тогда MN есть проекция продолженного отрезка PQ на пл. α.

$MN \perp AB$, $PM \perp AB$, то $(PNM) \perp AB$ и $PQ \perp AB \Rightarrow AB \perp PQ$.

Ответ: 90°.

202.



Дано: ΔABC, $AC \perp BC$, $SA = SB = SC = 10$ см; $CM = 5$ см – медиана.

Найти $\rho(S$, пл. $ABC)$.

Решение:

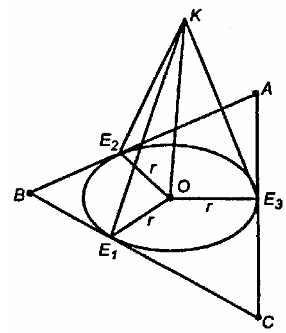
Прямая SM, где M – середина гипотенузы AB, перпендикулярна к пл. ABC (в задаче 199 дано доказательство этого утверждения). Итак, $SM \perp$ пл. ABC.

$$SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Ответ: $5\sqrt{3}$ см.

203.

Дано: $OK \perp (ABC)$; $AB = BC = 10$ см; $AC = 12$ см; $OK = 4$ см.



Решение:

В точки касания сторон ΔABC с окружностью проводим отрезки OE_1, OE_2 и OE_3.

$KO \perp (ABC)$, $OE_1 \perp BC$, $OE_2 \perp AB$, $OE_3 \perp AC$, то по теореме о 3-х перпендикулярах, $KE_1 \perp BC$, $KE_2 \perp BA$, $KE_3 \perp AC$.

Т. о. KE_1, E_2K и KE_3 суть искомые расстояния. Поскольку проекции этих отрезков на плоскость ΔABC равны (они равны r – радиусу вписанной окружности), то и отрезки равны:

$KE_1 = KE_2 = KE_3$;

$r = \dfrac{S}{p}$, $p = \dfrac{2 \cdot 10 + 12}{2} = \dfrac{32}{2} = 16$ (см).

Применим формулу Герона:

$S = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)}$;

$S = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$ (см^2); $r = \dfrac{48}{16} = 3$ (см);

$KE_3 = \sqrt{OK^2 + r^2}$; $KE_3 = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$ см.

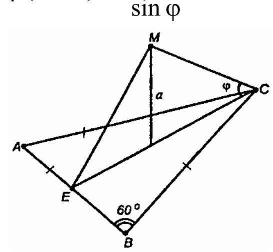
Ответ: 5 см.

204.

Решение:

а) $OA = OB = OC = R$, R – радиус описанной окружности около ΔABC, поэтому $MA = MB = MC = \dfrac{a}{\sin \varphi}$;

$\rho(M, A) = \rho(M, B) = \rho(M, C) = \dfrac{a}{\sin \varphi}$.



В правильном ΔABC: $CE \perp AB$, $OE = r$, r – радиус вписанной окружности.

$ME \perp AB$ (по теореме о 3-х перпендикулярах), следовательно, $\rho(M, AB) = ME$. Раз ΔABC – правильный, то $\rho(M, AB) = \rho(M, AC) = \rho(M, BC)$.

В ΔABC: $OC = a\text{ctg}\varphi$, $OE = \frac{1}{3}EC$, $R = OC = \frac{2}{3}EC$.

Из уравнения $a\text{ctg}\varphi = \frac{2}{3}EC$ получаем, что $EC = \frac{3a}{2}\cdot\text{ctg}\varphi$;

$OE = r = \frac{a\text{ctg}\varphi}{2}$.

Из ΔMOE: $ME = \sqrt{OM^2 + OE^2} = \frac{a}{2}\sqrt{4+\text{ctg}^2\varphi}$.

б) Длина окружности $C = 2\pi R = 2\pi \cdot OC$;

$C = 2\pi \cdot \frac{2}{3}\cdot\frac{3a\text{ctg}\varphi}{2} = 2\pi a\text{ctg}\varphi$.

в) $S_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$; $BE = CE\cdot\text{ctg}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a\text{ctg}\varphi$.

$AB = \sqrt{3}a\text{ctg}\varphi$;

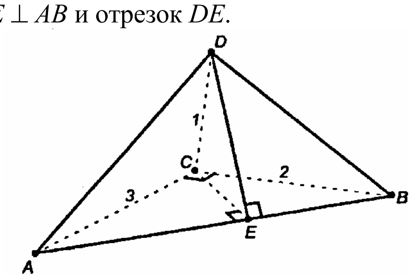
$S_{ABC} = \frac{3a^2\text{ctg}^2\varphi\cdot\sqrt{3}}{4}$.

Ответ: а) $\frac{a\text{ctg}\varphi}{2}$; $\frac{a}{2}\sqrt{4+\text{ctg}^2\varphi}$; б) $2\pi a\text{ctg}\varphi$; в) $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2\text{ctg}^2\varphi$.

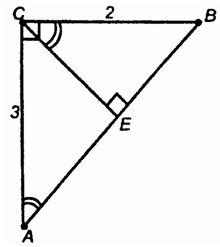
205.

Решение:

Проведем $CE \perp AB$ и отрезок DE.



По теореме о 3-х перпендикуляра $DE \perp AB$, DE – высота в треугольнике ADB.



$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$ $= \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{CE}{2} = \cos\angle BAC$ (что следует из подобия $\Delta ACE \sim \Delta ABC$ и $\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{BC}$). Отсюда $CE = \frac{6}{\sqrt{13}}$ (дм).

ΔDCE – прямоугольный. Тогда по теореме Пифагора:

$DE = \sqrt{1 + CE^2}$ $= \sqrt{1 + \frac{36}{13}} = \frac{7}{\sqrt{13}}$ (дм);

$S_{ADB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{7}{\sqrt{13}} = 3{,}5$ (дм^2).

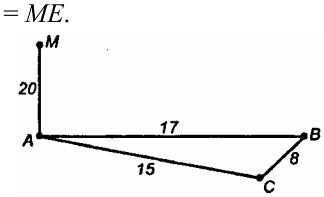
Ответ: 3,5 дм^2.

206.

Решение:

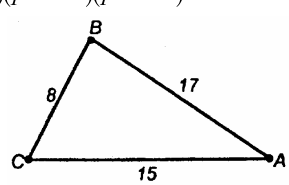
В ΔABC против меньшей стороны лежит меньший угол (что следует из известной теоремы синусов).

Проведем $AE \perp BC$ и ME. По теореме о 3-х перпендикулярах $ME \perp BC$, $\rho(M, BC) = ME$.



Применим формулу Герона:

$S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - BC)(p - AC)}$.



С другой стороны, $S_{ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AE=4AE$.

$p=\frac{15+17+8}{2}=20$ (см).

$S_{ABC}=\sqrt{20\cdot 5\cdot 3\cdot 12}=\sqrt{100\cdot 36}=60$ (см^2);

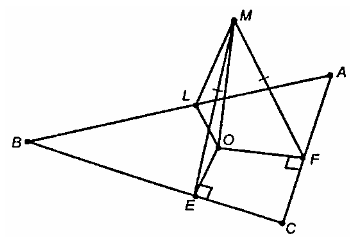
$4AE=60$, $AE=15$ (см). Тогда по теореме Пифагора:

$ME=\sqrt{MA^2+AE^2}$; $ME=\sqrt{400+225}=\sqrt{625}=25$ (см).

Ответ: 25 см.

207.

Решение:

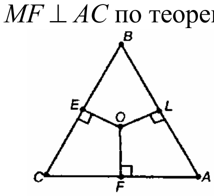


$MO\perp$ пл. ABC, поэтому $\Delta MOL=\Delta MOF=\Delta MOE$ (по катету и гипотенузе).

$OE=OF=OL=r$, r – радиус вписанной окружности; $r=S/p$.

$p=\frac{36}{2}=18$ см,

$MO\perp AC$, $OF\perp AC$, то $MF\perp AC$ по теореме о 3-х перпендикулярах.



$S=\sqrt{18\cdot 5\cdot 5\cdot 8}=5\cdot 3\cdot 4=60$ (см^2);

$r=\frac{S}{p}=\frac{60}{18}=\frac{10}{3}$ (см);

$MO=\sqrt{ME^2-OE^2}=\sqrt{\left(8\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{10}{3}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{26}{3}\right)^2-\left(\frac{10}{3}\right)^2}=$

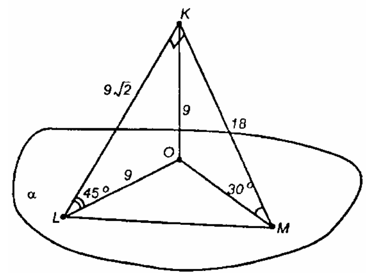
$=\frac{1}{3}\sqrt{36\cdot 16}=8$ см.

Ответ: 8 см.

208.

Решение:

ΔLOK и ΔMOK – прямоугольные (по условию, т.к. $KO \perp \alpha$).



Из ΔLOK: $KL = 9\sqrt{2}$ (т.к. $KL = KO : \sin 45^\circ$).

Из ΔMOK: $KM = 2 \cdot OK = 2 \cdot 9 = 18$ (т.к. OK лежит против угла 30°).

ΔKLM по условию прямоугольный,

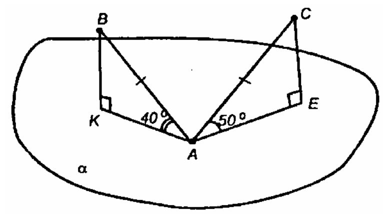
$$LM = \sqrt{KL^2 + MK^2} = \sqrt{\left(9\sqrt{2}\right)^2 + 18^2} = 9\sqrt{6} \text{ (см).}$$

Ответ: $9\sqrt{6}$ см.

209.

Решение:

Проведем $CE \perp \alpha$, $BK \perp \alpha$. Пусть $AB = AC = a$; тогда



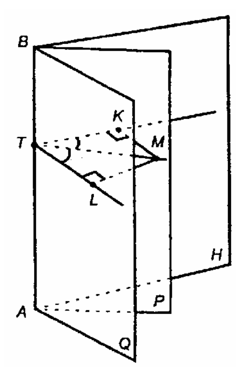
$BK = a\sin 40^\circ$; $CE = a\sin 50^\circ$.

Так как $\sin 50^\circ > \sin 40^\circ$, то $CE > BK$.

Ответ: расстояние от точки C больше.

210.

Решение:



1. Выберем произвольную т. $M \in P$.
2. Проводим $MT \perp AB$.

В пл. ABH проводим $KT \perp AB$.

В пл. ABQ проводим $TL \perp AB$.

3. $\angle KTL$ – линейный угол двугранного угла $HABQ$;

$\angle KTM$ – линейный угол двугранного угла $HABP$;

$\angle MTL$ – линейный угол двугранного угла $PABQ$;

$\angle KTM = \angle MTL$ – как линейные меры равных двугранных углов.

4. В пл. KTL проводим $MK \perp TK$, $ML \perp TL$.

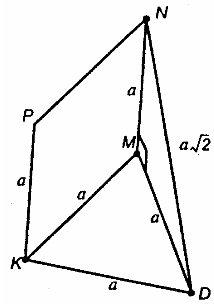
5. ΔKTM и ΔLTM – прямоугольные, TM – общая, углы KTM и MTL равны. $\Delta KTM = \Delta LTM$, отсюда $MK = ML$.

Поскольку т. M выбрана произвольно, то доказанное справедливо для всех точек из пл. MBP.

Что и требовалось доказать.

211.

Из того, что пл. $KDM \perp$ пл. $KMNP$ следует, что $NM \perp MD$.

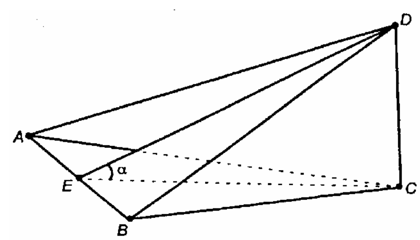


По теореме Пифагора

из ΔNDM: $ND = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$.

Ответ: $a\sqrt{2}$.

212.



Решение:

$DC \perp$ пл. ABC по условию, $DC \perp AB$. Проводим $CE \perp AB$, тогда по теореме о 3-х перпендикулярах $DE \perp AB$.

Очевидно, $\angle DEC$ – линейный угол двугранного угла $CABD$, пусть $\angle DEC = \alpha$.

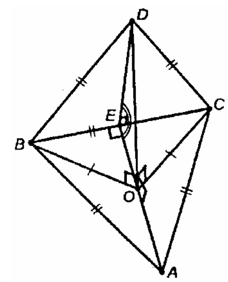
Пусть $CE = h$. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h = S$;

$$S_{ADB} = \frac{1}{2} AB \cdot DE = \frac{1}{2} AB \cdot \frac{h}{\cos\alpha} = \frac{S}{\cos\alpha}.$$

Что и требовалось доказать.

213.

Решение:



Проводим $DE \perp BC$, тогда $AE \perp BC$, так как $BE = EC$ (т.е. AE не только медиана, но и высота).

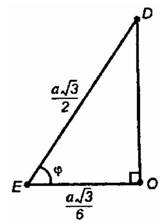
$AE \perp BC$, $DE \perp BC$, то $\angle DEA$ – линейный угол двугранного угла $ABCD$.

Пусть стороны треугольников равны a. В пл. ABC:

$AO = CO = BO = R = \dfrac{BC \cdot AC \cdot AB}{4S_{\Delta ABC}}$, где R – радиус описанной окружности. $R = \dfrac{a \cdot a \cdot a}{4\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Из прямоугольного ΔDOC по теореме Пифагора:

$$DO = \sqrt{DC^2 - OC^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$



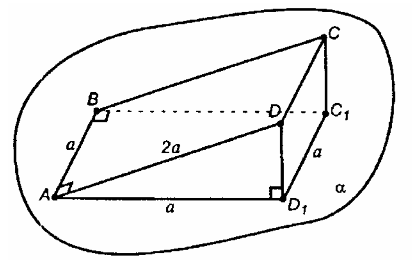
Из прямоугольного ΔDOE:

$$OE = r = \frac{S}{p};\ r = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2}{3a} = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$\text{tg}\varphi = \frac{OD}{OE};\ \text{tg}\varphi = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} : \frac{a\sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{2};\ \varphi = \text{arctg}\,2\sqrt{2}.$$

Ответ: $\text{arctg}\,2\sqrt{2}$.

214.

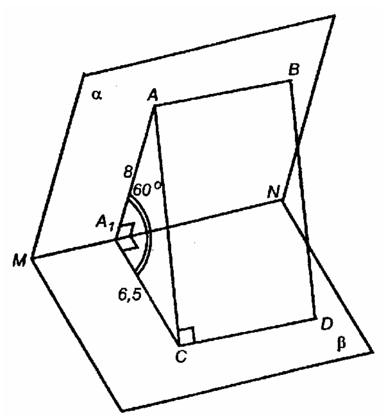


Решение:

По теореме, обратной к теореме о 3-х перпендикулярах, $AD_1 \perp AB$. $\angle DAD_1$ – линейный угол двугранного угла между плоскостями α и пл. $ABCD$. Пусть $AB = a$, тогда $BC = 2a$. Из прямоугольного ΔAD_1D находим $\cos\varphi$:

$$\cos\varphi = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2},\ \varphi = 60^\circ.$$

215.



Решение:

$AB \parallel CD$ – по условию, поэтому $AB \parallel \beta$.

По теореме II $AB \parallel MN$ и, значит, $MN \parallel CD$.

В пл. α проводим $AA_1 \perp MN$, а в пл. β проводим $A_1C \perp CD$.

$\rho(D, MN) = \rho(C, MN) = 6{,}5$ см.

$AA_1 \perp MN$, поэтому из условий $AA_1 \perp CD$, $AC_1 \perp CD$, то по теореме о 3-х перпендикулярах $AC \perp CD$.

$\rho(AB, CD) = AC$.

$\angle AA_1C$ – 60° – линейный угол двугранного угла $AMNC$.

По теореме косинусов для ΔA_1AC:

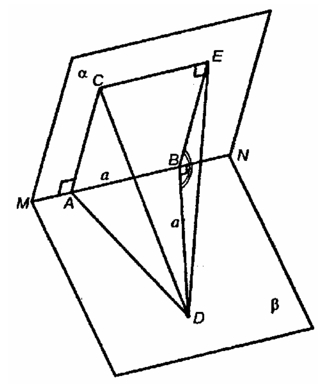
$$A_1C^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2 \cdot AA_1 \cdot A_1C \cdot \cos 60^{\circ};$$

$$A_1C^2 = 64 + \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 2 \cdot 8 \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{217}{4}; \; AC = \frac{1}{2}\sqrt{217} \text{ см.}$$

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{217}$ см.

216.

Решение:



Проведем $BE \perp MN$, соединим точки E и D, проведем $CE \parallel AB$.

$DB \perp MN$, $BE \perp MN$, то $\angle DBE$ – линейный угол двугранного угла $CMND$.

$ACEB$ – квадрат, $BE = a$.

Из ΔBDE по теореме косинусов: $DE^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos120^{\circ} = 3a^2$,

$DE = \sqrt{3}a$.

$AB \perp$ пл. DBE, $CE \parallel AB$, то $CE \perp$ пл. DBE, $CE \perp DE$.

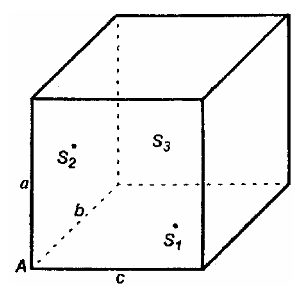
По теореме Пифагора из ΔCED:

$$CD = \sqrt{a^2 + 3a^2} = \sqrt{4a^2} = 2a$$

Ответ: $2a$.

217.

Решение:



$S_1 + S_2 + S_3 = 404$ (дм^2).

Пусть k – коэффициент пропорциональности, тогда измерения параллелепипеда равны:

$a = 3 \cdot k$, $b = 7 \cdot k$, $c = 8 \cdot k$ (дм).

$S_1 = bc$, $S_2 = ab$, $S_3 = ac$;

$bc + ab + ac = 404$, или $k^2 \cdot 7 \cdot 8 + k^2 \cdot 3 \cdot 7 + k^2 \cdot 3 \cdot 8 = 404$;

$k^2 \cdot 101 = 404$, $k^2 = 4$, $k > 0$, поэтому $k = 2$.

Пусть d – диагональ параллелепипеда.

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$; $a = 6$ (дм); $b = 14$ (дм); $c = 16$ (дм);

$d^2 = 36 + 195 + 256 = 488$;

$d = \sqrt{488} = 2\sqrt{122}$ (дм).

Ответ: $2\sqrt{122}$ (дм).

ГЛАВА III
МНОГОГРАННИКИ

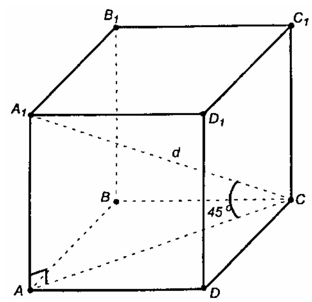
218.

Решение:

а) У прямой призмы боковые ребра перпендикулярны к основаниям, а основания – параллельны, следовательно, боковые грани – прямоугольники.

б) Основания – правильные многоугольники. Боковые ребра равны, боковые грани – равные прямоугольники.

219.



Решение:

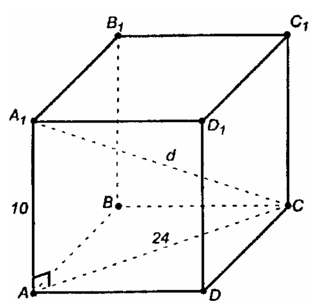
Из того, что острые углы в ΔA_1AC равны ($45°$), следует, что ΔA_1AC прямоугольный и равнобедренный, $A_1A = AC$.

По теореме Пифагора: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ (см);

$A_1A = 13$ см.

Ответ: 13 см.

220.



Решение:

Диагональ параллелепипеда – наклонная, проекция ее на плоскость основания является диагональю ромба.

Большей наклонной соответствует большая диагональ основания, именно, AC.

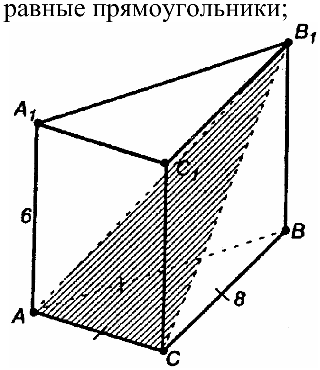
Из прямоугольного ΔA_1AC $A_1C = \sqrt{100 + 24^2} = 26$ (см).

Ответ: 26 см.

221.

Решение:

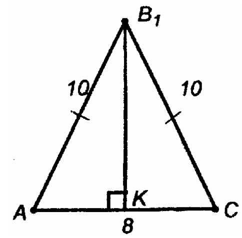
Боковые грани – равные прямоугольники;



$AB_1 = B_1C$; $CB_1 = \sqrt{CB^2 + BB_1^2}$; $CB_1 = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$ (см).

Проведем $B_1K \perp AC$. K попадет в середину AC (т.к. AB_1C – равнобедренный).

$AK = 4$; $B_1K = \sqrt{100 - 16} = 2\sqrt{21}$ (см);

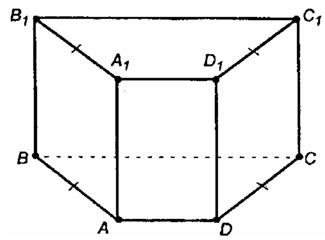


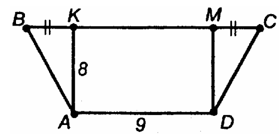
$S_{AB_1C} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{21} = 8\sqrt{21}$ (см^2).

Ответ: $8\sqrt{21}$ (см^2).

222.

Решение:





$ABCD$ – трапеция, $AB = DC$.

Найдем двугранный угол между плоскостями BB_1C_1C и пл. DD_1C_1C. $DC \perp C_1C$, $BC \perp C_1C$, поэтому $\angle BCD$ – линейный угол искомого двугранного угла.

$BK = MC$, $KM = 9$ см.

$BK + MC = 25 - 9 = 16$ см, $BK = MC = 8$ см.

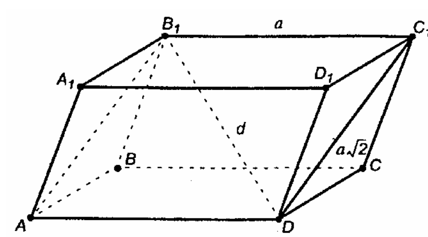
$\Delta ABK = \Delta DCM$, они прямоугольные и равнобедренные, $\angle BCD = 45^\circ$, $\angle CBA = \angle BCD = 45^\circ$.

$\angle BAD$ – линейный угол двугранного угла передней и боковой грани, $\angle BAD = \angle CDA = 135^\circ$.

Ответ: 45°, 135°, 45°, 135°.

223.

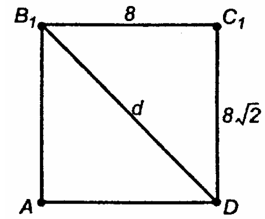
Через два противолежащих ребра куба проведено сечение, площадь которого равна $64\sqrt{2}$ см^2. Найдите ребро куба и его диагональ.



Решение:

Через противоположные ребра AD и B_1C_1 проведено сечение AB_1C_1D; AB_1C_1D – прямоугольник.

Пусть ребро куба равно a.



$AB_1 = DC_1 = a\sqrt{2}$ (как диагонали граней).

$S_{сеч} = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2} = 64\sqrt{2}$, отсюда $a^2 = 64$, $a = 8$ (см).

$d = \sqrt{8^2 + \left(8\sqrt{2}\right)^2} = 8\sqrt{3}$ (см).

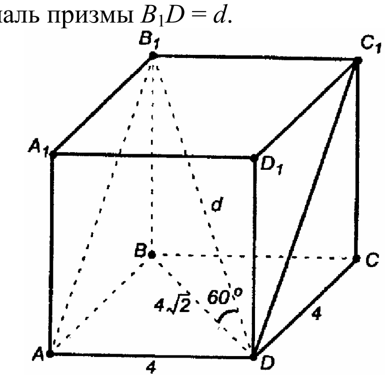
Ответ: 8 см, $8\sqrt{3}$ см.

224.

Решение:

AB_1C_1D – прямоугольник ($AB \perp AD$, $B_1B \perp AD$, по теореме о 3-х перпендикулярах $AB_1 \perp AD$, $B_1C_1 \parallel AD$, значит, $AB_1 \perp B_1C_1$).

Пусть диагональ призмы $B_1D = d$.



$d = B_1D = AC_1$.

Из квадрата $ABCD$: $AB = BD \cdot \sin 45^\circ = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4$ (см), $AD = 4$ см.

Из ΔBB_1D: $B_1B = \mathrm{tg}60^\circ = 4\sqrt{6}$ (см).

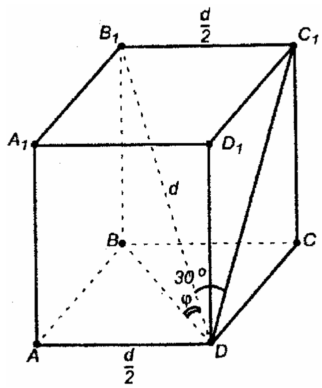
Из ΔDC_1C: $DC_1 = \sqrt{4^2 + \left(4\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{7 \cdot 4^2} = 4\sqrt{7}$ (см).

$S_{AB_1C_1D} = AD \cdot DC_1$; $S_{AB_1C_1D} = 4 \cdot 4\sqrt{7} = 16\sqrt{7}$ (см^2).

Ответ: $16\sqrt{7}$ см^2.

225.

Решение:



Пусть диагональ равна d, а угол между диагональю и плоскостью основания равен φ.

ΔB_1C_1D – прямоугольный, $B_1C_1 \perp C_1D$.

$AD = \dfrac{d}{2} = BC$.

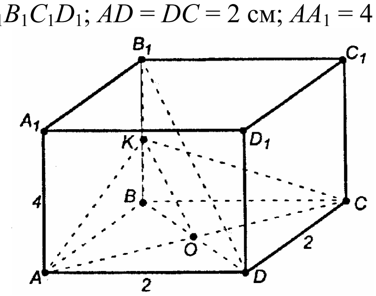
$ABCD$ – квадрат, $BD = \dfrac{d\sqrt{2}}{2} = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$.

Из ΔB_1DB находим $\cos\varphi = \dfrac{BD}{B_1D} = \dfrac{d}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{d} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = 45^o$.

Ответ: 45^o.

226.

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$; $AD = DC = 2$ см; $AA_1 = 4$ см.



Решение:

Построение сечения.

Через скрещивающиеся прямые B_1D и AC проведем плоскость, параллельную B_1D.

В плоскости B_1BD проводим $OK \parallel B_1D$, O – точка пересечения диагоналей основания.

Проведем AK и CK. Плоскость $AKC \parallel B_1D$ – по теореме I.

Искомое сечение – AKC.

$\Delta ABK = \Delta CBK$, $AK = KC$. $KO \perp AC$, поэтому KO – высота ΔAKC.

$\left.\begin{matrix} BO = OD \\ OK \parallel B_1D \end{matrix}\right\} \to OK$ – средняя линия в ΔB_1BD, $BK = KB_1$,

$KO = \frac{1}{2}B_1D$;

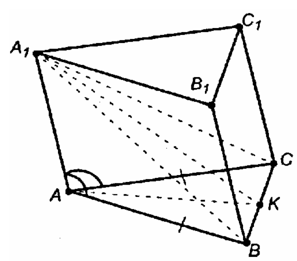
$BD = 2\sqrt{2}$, $B_1D = \sqrt{BB_1^2 + BD^2} = \sqrt{4^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{6}$ (см).

$KO = \frac{1}{2}B_1D = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$ (см)

$S_{AKC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot KO$; $S_{AKC} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ (см^2).

Ответ: $2\sqrt{3}$ см^2.

227.



Решение:

В пл. ABC проводим медиану AK, $AK \perp BC$.

Проведем отрезки A_1B, A_1C, A_1K.

$\Delta A_1AB = \Delta A_1AC$, так как A_1A – общая, $AB = AC$ – по условию, $\angle A_1AC = \angle A_1AB$.

$A_1B = A_1C$, ΔA_1BC – равнобедренный, в нем отрезок A_1K – медиана, поэтому $A_1K \perp BC$.

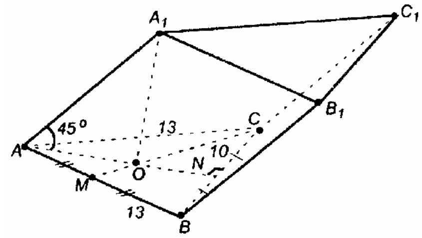
$BC \perp A_1K$, $BC \perp AK$, то $BC \perp$ пл. A_1AK, поэтому $BC \perp A_1A$.

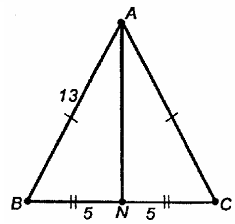
BB_1C_1C – параллелограмм, $BC \perp A_1A$, но $A_1A \parallel B_1B \parallel C_1C$, значит, $BC \perp B_1B$ и $BC \perp C_1C$. ($BC \parallel B_1C_1$, поэтому $B_1C_1 \perp B_1B$ и $B_1C \perp C_1C$).

Параллелограмм, у которого хотя бы один угол прямой, есть прямоугольник, поэтому BB_1C_1C – прямоугольник.

Что и требовалось доказать.

228.





Решение:

ΔA_1OA прямоугольны, $OA = OA_1$. $OA = \frac{1}{3}AN$ (т. O – центр масс).

$AN = \sqrt{AB^2 - NB^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$ (см); $OA = 12 \cdot \frac{2}{3} = 8$ см.

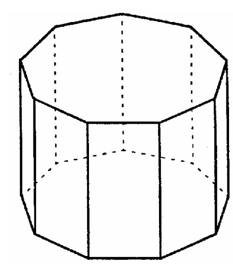
Из прямоугольного ΔA_1OA $A_1A = \sqrt{2}AO = 8\sqrt{2}$ (см).

$BC \perp A_1A$, поскольку $BC \perp$ пл. A_1AO, BCC_1B_1 – параллелограмм, у которого $BB_1 \parallel CC_1 \parallel A_1A$, поэтому $BC \perp BB_1$ и $BC \perp C_1C$. Следовательно, BB_1C_1C – прямоугольник.

$S_{BB_1C_1C} = BC \cdot BB_1$, $BB_1 = AA_1$. $S_{BB_1C_1C} = 80\sqrt{2}$ см^2.

Ответ: 80 см^2.

229.



Решение:

$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2 \cdot S_{\text{осн}}$

Пусть площадь боковой грани равна S, тогда $S_{\text{бок}} = n \cdot S$.

а) В основании – правильный треугольник.

$S_{\text{осн}} = \dfrac{a_3^2\sqrt{2}}{4}$, a_3 – сторона треугольника.

$S_{\text{бок}} = 3 \cdot S = 3 \cdot a_3 \cdot h$.

$S_{\text{полн}} = 2\dfrac{a_3^2\sqrt{2}}{4} + 3 \cdot a_3 \cdot h$. $S_{\text{бок}} = 450$ (см^2).

$S_{\text{полн}} = \dfrac{10^2\sqrt{3}}{2} + 450 \approx 536$ (см^2).

б) В основании – квадрат. $S_{\text{осн}} = a_4^2$, a_4 – сторона квадрата.

$S_{\text{бок}} = 4 \cdot a_4 \cdot h$.

$S_{\text{полн}} = 2a_4^2 + 4a_4 \cdot h$.

$S_{\text{бок}} = 384$ (дм^2).

$S_{\text{полн}} = 2 \cdot 12^2 + 384 = 672$ (дм^2).

в) В основании – правильный 6-угольник.

$S_{\text{осн}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a_6^2$, a_6 – сторона 6-углъника.

$S_{\text{бок}} = 6 \cdot a_6 \cdot h$. $S_{\text{бок}} = 69$ (дм^2).

$S_{\text{полн}} = 2 \cdot S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = 3\sqrt{3} \cdot 2{,}3^2 + 69 \approx 97$ (дм^2).

г) В основании – правильный 5-угольник.

a_5 – сторона правильного 5-угольника.

$a_5 = 2r\text{tg}\dfrac{180^\circ}{5} = 2r\text{tg}35^\circ$, $r = \dfrac{a_5}{2\text{tg}36^\circ}$.

$S_{\text{бок}} = 5 \cdot a_5 \cdot h$. $S_{\text{осн}} = r \cdot p = \dfrac{a_5}{2\text{tg}36^\circ} \cdot \dfrac{5a_5}{2} = \dfrac{5a_5^2}{4\text{tg}36^\circ}$.

$S_{\text{полн}} = 2S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}} = \dfrac{5a_5^2}{2\text{tg}36^\circ} + 5a_3 \cdot h$.

r – радиус вписанной окружности,

p – полупериметр 5-угольника.

$S_{\text{бок}} = 5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}1 = 0{,}2$ м^2; $\text{tg}36^\circ \approx 0{,}73$;

$S_{\text{полн}} \approx 0{,}8$ (м^2).

Ответ: а) 450 см^2 и ≈536 см^2;

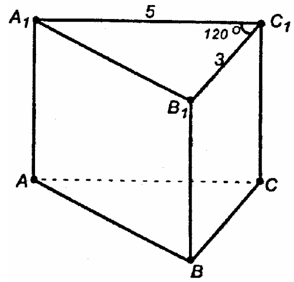
б) 384 дм^2 и 672 дм^2;

в) 69 дм^2 и ≈97 дм^2;

г) 0,2 м^2 и ≈0,8 м^2.

230.

Решение:



Пусть ребро призмы, то есть ее высота, равно H.

$S_{AA_1C_1C} = 5H$; $S_{BB_1C_1C} = 3H$.

Из $\Delta A_1B_1C_1$ по теореме косинусов запишем:

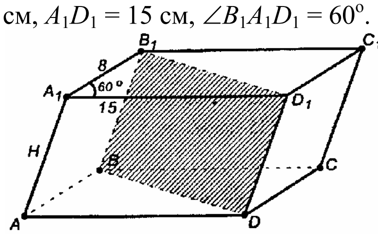
$$A_1B_1^2 = 25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos 120^\circ = 25 + 9 + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 49 ;$$

$A_1B_1 = 7$ (см). $S_{AA_1B_1B} = 7H$ (см^2).

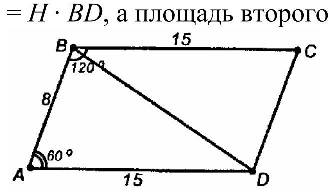
Максимальную площадь из боковых граней имеет грань AA_1B_1B.
$7H = 35$, $H = 5$ (см); $S_{бок} = 5H + 3H + 7H = 15H = 75$ (см^2).
Ответ: 75 см^2.

231.

Решение:
Пусть $AB_1 = 8$ см, $A_1D_1 = 15$ см, $\angle B_1A_1D_1 = 60^\circ$.



Пусть боковое ребро равно H, тогда площадь первого диагонального сечения $S_1 = H \cdot BD$, а площадь второго $S_2 = H \cdot AC;$



$BD_2 = 64 + 225 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \cos 60^\circ = 289 - 120 = 169$.

$BD = \sqrt{169} = 13$ (см);

$AC_2 = 64+225 - 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \cos 120^o = 64 + 225 + 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \dfrac{1}{2} = 409.$

$AC = \sqrt{409}$; $\sqrt{409} > 13$, поэтому $AC > BD$. Наименьшее сечение BB_1D_1D.

Сечение изображено на рисунке, $H \cdot 13 = 130$, $H = 10$ (см).

$S_{бок} = 2S_{AA_1D_1D} + 2S_{AA_1B_1B} = 2 \cdot 15 \cdot 10 + 2 \cdot 8 \cdot 10 = 460$ (см^2).

$2S_{осн} = 2 \cdot 8 \cdot 15 \cdot \sin 60^o = 5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} = 120\sqrt{3}$ (см^2).

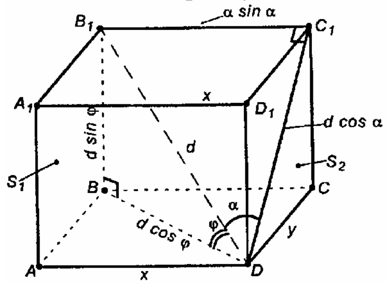
$S_{полн} = 20\left(23 + 6\sqrt{3}\right)$(см^2).

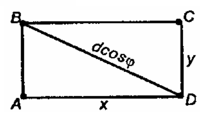
Ответ: $20\left(23 + 6\sqrt{3}\right)$ см^2.

232.

Решение:

Диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.





Пусть стороны основания равны x и y, причем $x > y$.

Пусть $B_1D = d$. Из ΔB_1DB: $BD = d\cos\varphi$. По теореме Пифагора:

$x^2 + y^2 = d^2\cos^2\varphi$. (1)

Из ΔB_1C_1D: $x = d\sin\alpha$. (2)

Подставим (2) в (1). Получим:

$y^2 + d^2\sin^2\alpha = d^2\cos^2\varphi$; $y^2 = d^2(\cos^2\varphi - \sin^2\alpha)$;

$y = d\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha}$;

$S_1 = S_{AA_1D_1D} = x \cdot d \cdot \sin\varphi = d^2 \sin\alpha \cdot \sin\varphi$;

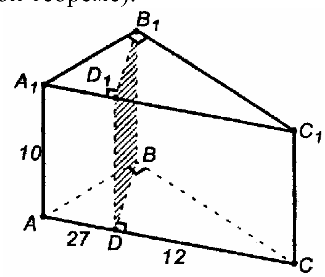
$S_{бок} = 2(S_1 + S_1) = 2d^2 \sin\varphi\left(\sin\alpha + \sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha}\right)$.

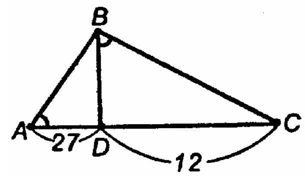
Ответ: $2d^2 \sin\varphi\left(\sin\alpha + \sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha}\right)$.

233.

Решение:

Чтобы построить сечения, проведем $BD \perp AC$, $DD_1 \perp BB_1$, отрезок D_1B_1. Поскольку $AC \perp B_1B$, то $AC \perp$ пл. B_1BD. Пл. $AA_1C_1C \perp$ пл. DD_1B_1B (по известной теореме).





Поскольку $D_1D \perp BB_1$ и $D_1D = BB_1$, то DD_1B_1B – параллелограмм. Раз $D_1D \perp DB$, то DD_1B_1B – прямоугольник.

$BD = \sqrt{AD \cdot DC}$. $BD = \sqrt{9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4} = 18$ (см)

$\left(\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{CD}{BD} \to BD^2 = DC \cdot AD\right)$; $S_{B_1D_1DB} = 10 \cdot 8 = 180$ (см^2).

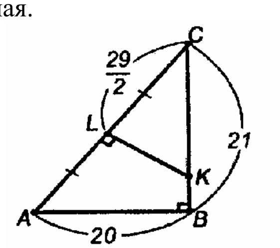
Ответ: 180 см^2.

234.

Решение:

Секущая площадь перпендикулярна к гипотенузе ΔABC, лежащего в основании, значит, LK – пересечение секущей плоскости с основанием, – перпендикулярна гипотенузе AC.

Возможны 2 случая.



1) $AC = \sqrt{20^2 + 21^2} = \sqrt{841} = 29$ (см).

Из ΔKLC: $\text{tg}\angle C = \dfrac{LK}{LC} = \dfrac{\frac{LK}{29}}{2}$.

В ΔABC: $\text{tg}\angle C = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{20}{21}$.

Отсюда: $\dfrac{\frac{LK}{29}}{2} = \dfrac{20}{21}$, $LK = \dfrac{20}{21} \cdot \dfrac{29}{2} = \dfrac{290}{21}$ (см).

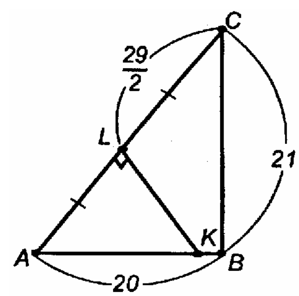
Сравним CK и CB.

$\cos\angle C = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{21}{29}$.

Из ΔKLC: $CK = \dfrac{LC}{\cos\angle C} = \dfrac{29}{2} \cdot \dfrac{21}{29} = 20\dfrac{1}{42}$ (см);

$CB = 21$ см; $CK < CB$.

2)



$\Delta ABC \sim \Delta ALK$; $\dfrac{20}{AK} = \dfrac{21}{LK}$;

$LK = \dfrac{21}{20} AL = \dfrac{609}{40}$ (см).

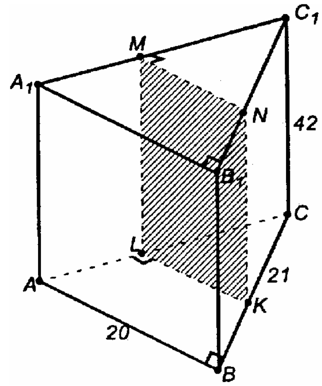
Сравним AK и AB.

$\cos\angle A = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{20}{29}$.

Из ΔALK: $AK = \dfrac{AL}{\cos\angle C} = \dfrac{29}{2} \cdot \dfrac{29}{20} = 20\dfrac{1}{40}$ см;

$AB = 20$ см; $AK > AB$. Случай невозможен.

Построим сечение:



Через середину AC – т. L – проведем $LK \perp AC$. Через т. L и т. K проведем отрезки $LM \parallel BB_1$ и $KN \parallel BB_1$; соединим M и N.

Раз $ML \perp$ пл. ABC, то по теореме п. 23 пл. $MLKN \perp$ пл. ABC.

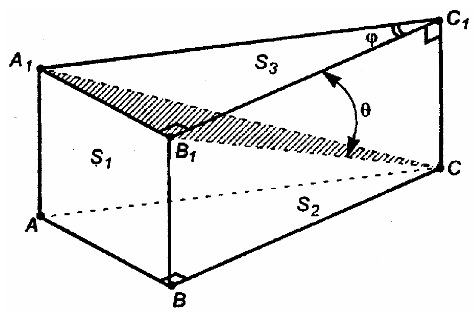
$MLKN$ – прямоугольник.

$S_{MNKL} = NK \cdot LK$;

$$S_{MNKL} = 42 \cdot \frac{290}{21} = 580 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 580 см^2.

235.



Решение:

Сечение – это ΔA_1B_1C. Отыщем линейный угол двугранного угла $C_1A_1B_1B$.

$C_1B_1 \perp B_1A_1$, $CB_1 \perp B_1A_1$, то PC_1B_1C есть линейный угол данного двугранного угла.

$\angle CB_1C_1 = \theta$.

Пусть $C_1B = a$, тогда $A_1B_1 = a \cdot \text{tg}\varphi$;

$C_1C = a \cdot \text{tg}\theta$ (из ΔCB_1C_1), $B_1C = \dfrac{a}{\cos\theta}$.

ΔA_1B_1C – прямоугольный, $A_1B_1 \perp B_1C$.

$$S_{сеч} = S_{A_1B_1C_1} = A_1B_1 \cdot \frac{1}{2} B_1C = \frac{a\text{tg}\varphi \cdot a}{\cos\theta \cdot 2} = \frac{a^2\text{tg}\varphi}{2\cos\theta}.$$

Все боковые грани являются прямоугольниками, значит,
$S_{бок} = S_1 + S_2 + S_3$, где

$$S_1 = S_{AA_1B_1B} = A_1B_1 \cdot B_1B = a \cdot \text{tg}\varphi \cdot a \cdot \text{tg}\theta = a^2\text{tg}\varphi \cdot \text{tg}\theta;$$

$$S_2 = S_{B_1C_1CB} = B_1C_1 \cdot C_1C = a \cdot a\text{tg}\theta = a^2\text{tg}\theta;$$

$$A_1C_1 = \frac{a}{\cos\varphi};$$

$$S_3 = S_{C_1CAA_1} = C_1C \cdot A_1C_1 = \frac{a^2\text{tg}\theta}{2\cos\varphi};$$

$$S_{бок} = a^2\text{tg}\varphi \cdot \text{tg}\theta + a^2\text{tg}\theta + \frac{a^2\text{tg}\theta}{2\cos\varphi} = a^2 \cdot \text{tg}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} + 1 + \frac{1}{\cos\varphi}\right) =$$

$$= a^2\text{tg}\theta \frac{1 + \sin\varphi + \cos\varphi}{\cos\varphi};$$

$$\frac{S_{бок}}{S_{сеч}} = \frac{a^2 \cdot \sin\theta(1 + \sin\varphi + \cos\varphi)}{\cos\theta \cdot \cos\varphi} : \frac{a^2 \cdot \sin\varphi}{2\cos\theta \cdot \cos\varphi} =$$

$$= \frac{2\sin\theta}{\sin\varphi}(1 + \sin\varphi + \cos\varphi);$$

$$1 + \sin\varphi + \cos\varphi = 1 + 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + 2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1 =$$

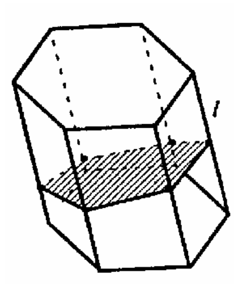
$$= 2\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right);$$

$$\frac{S_{бок}}{S_{сеч}} = \frac{2\sqrt{2}\sin\theta\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{2}\sin\theta\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}}$.

236.

Решение:



Пусть l – длина бокового ребра;

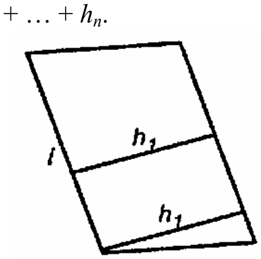
$P_\perp$ есть периметр сечения.

Каждая боковая грань есть параллелограмм. Сечение перпендикулярно боковым граням, то есть оно перпендикулярно боковым ребрам.

h_1 – высота параллелограмма – одной из боковых граней.

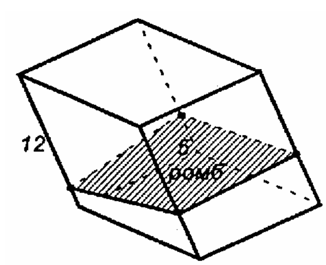
$S = l \cdot h_1$ – площадь одной боковой грани. Таких граней – n и каждая грань – параллелограмм – имеет свою высоту, следовательно,

$S_{бок} = S_1 + S_2 + \ldots + S_n = l \cdot h_1 + l \cdot h_2 + \ldots + l \cdot h_n = l(h_1 + h_2 + \ldots + h_n) =$ $= l \cdot P^{\wedge}$, где $P^{\wedge} = h_1 + h_2 + \ldots + h_n$.



Что и требовалось доказать.

237.



Решение:

Пусть $P_\perp$ — периметр сечения. По формуле $S_{бок} = l \cdot P_\perp$,

$S_{бок} = 12 \cdot P_\perp$,

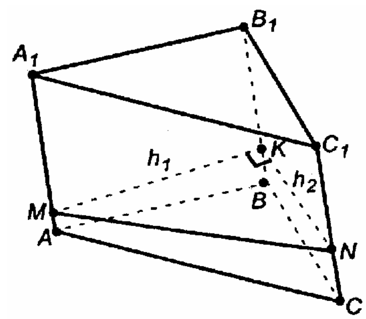
$P_\perp = 5 \cdot 4 = 20$ (см),

$S_{бок} = 12 \cdot 20 = 240$ (см^2).

Ответ: 240 см^2.

238.

Решение:



Пусть пл. $A_1B_1BA \perp$ пл. B_1C_1CB;

$\rho(BB_1, AA_1) = 35$ см; $\rho(BB_1, CC_1) = 12$ см; $BB_1 = 24$ см.

Возьмем любую т. $K \in BB_1$. Проведем $MK \perp BB_1$ и $NK \perp BB_1$.

$\angle MNK = 90^o$.

$\rho(BB_1, AA_1) = h_1 = MK$,

$\rho(BB_1, CC_1) = h_2 = KN$.

$MK \perp B_1B$, $B_1B \parallel C_1C$, то

$MK \perp C_1C$, $KN \perp C_1C$, то по теореме о 3-х перпендикулярах, $MN \perp C_1C$.

Таким образом, $MN \perp AA_1$.

Итак, MKN есть перпендикулярное сечение призмы.

Известно, $S_{бок} = l \cdot P_\perp$. Имеем из

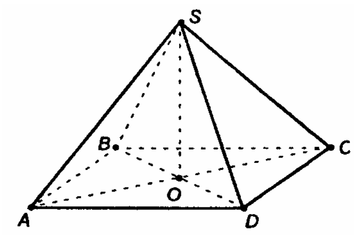
ΔMKN: $MN = \sqrt{MK^2 + KN^2}$; $MN = \sqrt{35^2 + 12^2} = 38$ см.

$S_{бок} = (35 + 12 + 37) \cdot 24 = 2016$ см^2.

Ответ: 2016 см^2.

239.

Точка пересечения диагоналей является центром ромба $ABCD$.



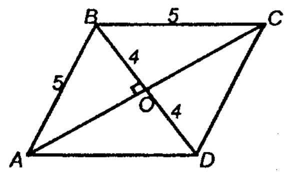
Следовательно, пирамида является правильной.

По свойству диагоналей ромба: DO = BO = 4 (см);

$AO=\sqrt{5^2-4^2}=3$ (см).

Из ΔASO по теореме Пифагора имеем: $AS=\sqrt{SO^2+OA^2}=$

$=\sqrt{7^2+3^2}=\sqrt{49+9}=\sqrt{58}$ (см).



$SA=SC$ как наклонные, имеющие одинаковые проекции.

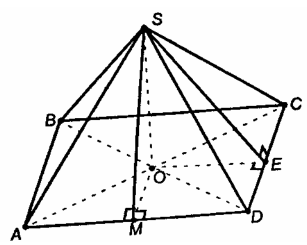
Аналогично, из ΔSDO по теореме Пифагора имеем

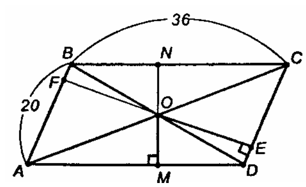
$SD=\sqrt{SO^2+OD^2}=\sqrt{7^2+4^2}=\sqrt{49+16}=\sqrt{65}$ (см).

$SB=SD$ как наклонные, имеющие одинаковые проекции.

Ответ: $\sqrt{58}$ см, $\sqrt{58}$ см, $\sqrt{65}$ см, $\sqrt{65}$ см.

240.





По условию высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей – т. O, поэтому $SA=SC$ и $SB=SD$ как наклонные, имеющие равные проекции.

$\Delta SAB=\Delta SCD$ и $\Delta SBC=\Delta SAD$ (по трем сторонам).

$S_{бок}=2\cdot(S_{SAD}+S_{SDC})$.

Проведем $OE\perp CD$ и $OM\perp AD$. По теореме о 3-х перпендикулярах $SE\perp CD$ и $SM\perp AD$.

Из ΔSOM по теореме Пифагора имеем $SM=\sqrt{SO^2+OM^2}$, из ΔSOE имеем $SE=\sqrt{SO^2+OE^2}$.

Найдем высоту основание FE, зная его площадь и сторону AB:

$S_{ABCD} = AB \cdot FE$, 360=20·FE, FE=18 см.

Аналогично, найдем высоту MN

$S_{ABCD} = AD \cdot MN$, 360=20 · MN, MN=10 см.

Поэтому $OM=\frac{1}{2}$ MN=5 см и $OE=\frac{1}{2}$ FE=9 см.

SM=$\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{169}$ =13 (см), SE=$\sqrt{12^2+9^2}=\sqrt{225}$ =15 (см);

$S_{SAD}=\frac{1}{2}AD\cdot SM=\frac{1}{2}36\cdot 13=\frac{36\cdot 13}{2}$ (см^2),

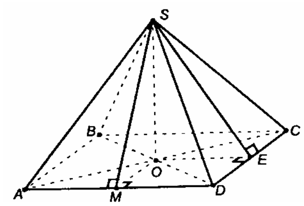
$S_{SDC}=\frac{1}{2}SD\cdot SE=\frac{1}{2}20\cdot 15=\frac{20\cdot 15}{2}$ (см^2),

$S_{бок} = 2(S_{SAD} + S_{SDC})$

$S_{бок}=2\cdot\frac{1}{2}(36\cdot 13+20\cdot 15)$ =468+300=768 (см^2).

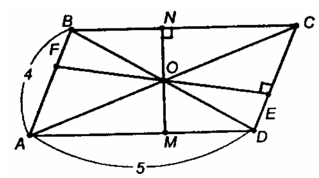
Ответ: 768 см^2.

241.



По свойству диагоналей ромба: $AO=OC$, $OB=OD$. Поэтому $SA=SC$ как наклонные, имеющие одинаковые проекции. $\Delta SAB=\Delta SCD$ и $\Delta SBC=\Delta SAD$ (по трем сторонам).

$S_{полн}=S_{ABCD}+2(S_{SDC}+S_{SAD})$.



Проведем $OM\perp AD$ и $OE\perp DC$. Используя теорему о 3-х перпендикулярах, $SM\perp AD$ и $SE\perp DC$. Далее по теореме Пифагора:

$SM=\sqrt{SO^2+OM^2}$, $SE=\sqrt{SO^2+OE^2}$.

Пусть BD – меньшая диагональ, BD=3 (м).

$S_{ABCD}=2\cdot S_{\Delta ABD}$. По формуле Герона:

$S_{ABD}=\sqrt{p(p-AB)(p-BD)(p-AD)}$, где $p=\frac{1}{2}(3+4+5)=\frac{12}{2}$=6 (м).

$S_{ABD}=\sqrt{6\cdot 2\cdot 3\cdot 1}=6$ (м^2), $S_{ABCD}=2\cdot 6$ =12 (м^2).

Но $S_{ABCD}=AD\cdot MN$, поэтому имеем:

12=$5\cdot MN, MN=\frac{12}{5}$ (м), $OM=\frac{6}{5}$ (м),

$S_{ABCD}=AB\cdot FE$, 12=4· FE, FE =3, $OE=\frac{3}{2}$ (м).

$$SE=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{4+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}\ (\text{м}^2),$$

$$SM=\sqrt{2^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2}=\sqrt{4+\frac{36}{25}}=\frac{\sqrt{136}}{\sqrt{25}}=\frac{2\sqrt{34}}{5}=(\text{м}),$$

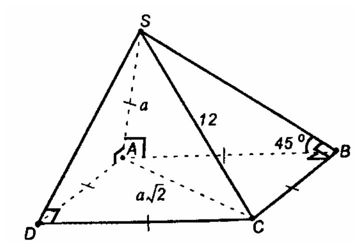
$$S_{SDC}=\frac{1}{2}DC\cdot SE=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{5}{2}=5\ (\text{м}^2),$$

$$S_{ASD}=\frac{1}{2}AD\cdot SM=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{2\sqrt{34}}{5}=\sqrt{34}\ (\text{м}^2),$$

$$S_{полн}=12+2\left(5+\sqrt{34}\right)=12+10+2\sqrt{34}=2\sqrt{34}+22\ (\text{м}^2).$$

Ответ: $(2\sqrt{34}+22)\text{м}^2$.

242.



Известно, что из двух наклонных, проведенных из одной точки, больше та, проекция которой больше, также очевидно. Сторона квадрата меньше его диагоналей. Следовательно, проекция *AC* наклонной *SC* больше проекций *AD* и *AB* наклонных *SD* и *SB*. Значит, наибольшее боковое ребро *SC*=12 см. Пусть *AB*=α, тогда $AC=\alpha\sqrt{2}$.

Из ΔSAC по т. Пифагора: $SC=\sqrt{SA^2+AC^2}$;
$SC=\sqrt{\alpha^2+2\alpha^2}=\alpha\sqrt{3}$, $\alpha\sqrt{3}=12$, отсюда $\alpha=\frac{12}{\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{3}}{3}=4\sqrt{3}$ (см).

а) $SA=4\sqrt{3}$ см.

б) $S_{SAD}=S_{SAB}=\frac{1}{2}SA\cdot SB=\frac{1}{2}\alpha^2=\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 3=24$ (см²).

По теореме о 3-х перпендикулярах $SD\perp DC$ и $SB\perp BC$.

$$S_{SDC}=\frac{1}{2}SD\cdot DC=\frac{1}{2}\alpha\sqrt{2}\cdot\alpha=\frac{\alpha^2\sqrt{2}}{2}=\frac{48\cdot\sqrt{2}}{2}=24\sqrt{2}\ (\text{см}^2),$$

$$S_{SBC}=\frac{1}{2}SB\cdot BC=\frac{1}{2}\alpha\sqrt{2}\cdot\alpha=\frac{\alpha^2\sqrt{2}}{2}=24\sqrt{2}\ (\text{см}^2).$$

$$S_{бок}=2S_{SAB}+2S_{SDC}=2\cdot 24+2\cdot 24\sqrt{2}=48+48\sqrt{2}=48(\sqrt{2}+1)\ (\text{см}^2).$$

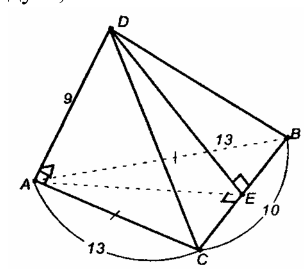
Ответ: а) $4\sqrt{3}$ см; б) $48(\sqrt{2}+1)$ см².

243.

$$S_{ADB} = S_{ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 9 = = \frac{117}{2} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Построим $AE \perp BC$ и отрезок DE.

По теореме о 3-х перпендикулярах следует, что $DE \perp BC$.



Из ΔAEB по т. Пифагора имеем: $AE = \sqrt{AB^2 - EB^2}$

$AE = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} =$

$= \sqrt{144} = 12$ (см),

Из ΔADE по т. Пифагора имеем:

$DE = \sqrt{AD^2 + AE^2}$ $DE = \sqrt{9^2 + 12^2} =$

$= \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$ (см),

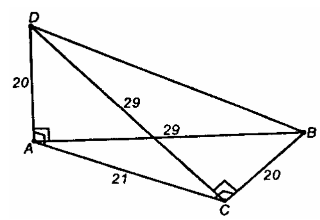
$$S_{DCB} = \frac{1}{2} BC \cdot DE = \frac{1}{2} 10 \cdot 15 = 75 \text{ (см}^2\text{)},$$

$$S_{бок} = 2 \cdot \frac{117}{2} + 75 = 117 + 75 = 192 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 192 см^2.

244.

Т.к. $DA \perp BC$, $AC \perp BC$, то по теореме о 3-х перпендикулярах: $DC \perp CB$.



По т. Пифагора имеем:

1) $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} =$

$=20$ (см),

2) $DC = \sqrt{AD^2 + AC^2} = \sqrt{20^2 + 21^2} =$

$=29$ (см),

$S_{бок} = S_{APC} + S_{APB} + S_{DCB}$,

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 = 210 \text{ (см}^2\text{)},$$

$$S_{ADB} = \frac{1}{2} AD \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 29 = 290 \text{ (см}^2\text{)},$$

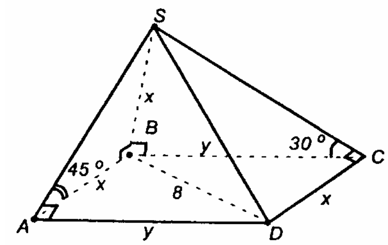
$$S_{DCB} = \frac{1}{2} DC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 29 \cdot 20 = 290 \text{ (см}^2\text{)},$$

$$S_{бок} = 210 + 2 \cdot 290 = 210 + 580 = 790 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: 790 см^2.

245.

Из теоремы о 3-х перпендикулярах следует, что $SA \perp AD$ и $SC \perp CD$, то есть $\angle SAB$ – линейный угол двугранного угла между гранью SAD и плоскостью основания, а $\angle SCB$ – линейный угол двугранного угла между гранью SDC и плоскостью основания.



По условию $\angle SCB = 30^\circ$, $\angle SAB = 45^\circ$.

Пусть $AB = x$, $BC = y$.

Тогда из ΔSBA получим $\frac{SB}{x} = tg45^\circ = 1$, $SB = x$.

Из ΔSBC имеем $\frac{x}{y} = tg30^\circ$, $\frac{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x\sqrt{3} = y$.

Из ΔABD: $x^2 + y^2 = BD^2 = 8^2 = 64$.

Получим систему:

$$\begin{cases} y = x\sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 64 \end{cases}; \quad x^2 + 3x^2 = 64; \; 4x^2 = 64, x^2 = 16.$$

Т.к. $x > 0$, то $x = 4$ (см), а $y = 4\sqrt{3}$ (см).

Т.е. $AB = CD = SB = 4$ см, $BC = AD = 4\sqrt{3}$ см.

$SC = \sqrt{SB^2 + BC^2} = \sqrt{16 + 16 \cdot 3} = \sqrt{64} = 8$ см,

$SA = \sqrt{SB^2 + BA^2} = 4\sqrt{2}$ (см),

$S_{ABS} = \frac{1}{2} SB \cdot BA = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$ (см^2),

$S_{SBC} = \frac{1}{2} SB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ (см^2),

$S_{SDC} = \frac{1}{2} SC \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 = 16$ (см^2),

$S_{SAD} = \frac{1}{2} SA \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{6}$ (см^2),

$S_{бок} = S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SDC} + S_{SAD} = 8 + 8\sqrt{3} + 16 + 8\sqrt{6} =$
$= 24 + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{6} = 8\left(3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)$ (см^2);

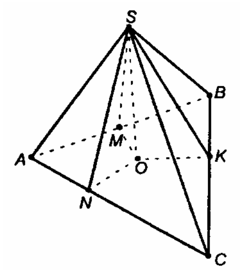
$S_{полн.пов} = S_{бок} + S_{ABCD}$, $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 4 \cdot 4\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ (см^2),

$S_{полн.пов} = 24 + 8\sqrt{3} + 8\sqrt{6} + 16\sqrt{3} = 24 + 24\sqrt{3} + 8\sqrt{6} =$

$= 8(3 + 3\sqrt{3} + \sqrt{6})$ (см^2).

Ответ: $8(3+3\sqrt{3}+\sqrt{6})$ см^2.

246.



Пусть SO – высота пирамиды, а SN, SM, SK – высоты боковых граней, $SN=SM=SK=41$ см.

Т.к. равные наклонные, поведенные из одной точки, имеют равные проекции, то $OM=ON=OK$. Т.е. точка O равноудалена от сторон ΔABC, значит, она – центр вписанной в ΔABC окружности. По теореме, обратной к теореме о 3-х перпендикулярах имеем, $ON\perp AC$, $OM\perp AB$, $OK\perp BC$. Значит, точка O равноудалена от всех сторон ΔABC.

$AC + CB + BA = P_{\Delta ABC} = 42$ (см).

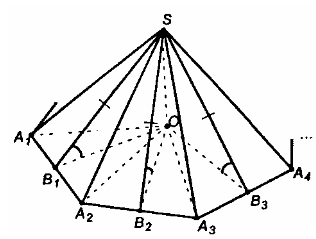
Пусть $OM = ON = OK = r$, тогда $r = \dfrac{S}{\frac{1}{2}p}$, $\frac{1}{2}P = p = 21$ (см).

Из ΔSON имеем $ON = r = \sqrt{SN^2 - SO^2} = \sqrt{41^2 - 40^2} = 9$ (см),

$S = r \cdot p$, $S = 9 \cdot 21 = 189$ (см^2).

Ответ: 189 см^2.

247.



а) Пусть SO – высота некоторой n-угольной пирамиды. Построим отрезки OB_1, OB_2, OB_3, ..., OB_n, проходящие через т. O перпендикулярно к сторонам многоугольника, лежащего в основании. По теореме о 3-х перпендикулярах имеем: $SB_1\perp A_1A_2$, $SB_2\perp A_2A_3$, $SB_3\perp A_3A_4$, и так далее. тогда, $\angle SB_1O$, $\angle SB_2O$, $\angle SB_3O$ и т.д. –линейные углы двугранных углов, образованных боковыми гранями пирамиды с плоскостью основания. По условию $\angle SB_1O = \angle SB_2O = \angle SB_3O = \ldots$

Рассмотрим ΔSOB_1, ΔSOB_2, ΔSOB_3, и т.д. Все эти треугольники равны по катету SO и острому углу:

$\Delta SOB_1 = \Delta SOB_2 = \Delta SOB_3 = \ldots$ Отсюда $OB_1=OB_2=OB_3=\ldots$

Значит, точка O равноудалена от всех сторон многоугольника, лежащего в основании пирамиды, то есть является центром вписанной в многоугольник окружности.

Следовательно, высота пирамиды SO проходит через центр вписанной в основание окружности.

б) SB_1, SB_2, SB_3 и т.д. – высоты боковых граней пирамиды (по построению). Т.к. $\Delta SOB_1 = \Delta SOB_2 = \Delta SOB_3 = \ldots$, то $SB_1 = SB_2 = SB_3 = \ldots$

в) $S_{\Delta SA_1A_2} = \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot SB_1$, $S_{\Delta SA_2A_3} = \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot SB_2$,

$S_{\Delta SA_3A_4} = \frac{1}{2} A_3A_4 \cdot SB_3$, но $SB_1 = SB_2 = SB_3 = \ldots$, следовательно,

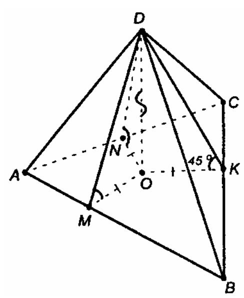
$$S_{бок} = \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot SB_1 + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot SB_1 + \frac{1}{2} A_3A_4 \cdot SB_1 + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} SB_1 (A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n + A_nA_1) = \frac{1}{2} SB_1 \cdot P,$$ где P – периметр основания.

$$P = A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n + A_nA_1.$$

248.

Пусть DO – высота пирамиды.



Построим $OM \perp AB$, $ON \perp AC$, $OK \perp BC$. Из теоремы о 3-х перпендикулярах следует, что $DM \perp AB$, $DK \perp BC$, $DN \perp AC$.

Пусть $\angle DMO$, $\angle DKO$, $\angle DNO$ – линейные углы двугранных углов боковых граней с плоскостью основания.

По условию $\angle DMO = \angle DKO = \angle DNO = 45^\circ$.

Тогда $\Delta DMO = \Delta DKO = \Delta DNO$ по катету и острому углу), из равенства треугольников следует: $MO = OK = ON = r$, $DM = DK = DN$.

r – радиус вписанной в ΔABC окружности, $OM = DO$, т.к. ΔMOD – равнобедренный.

$$S = \sqrt{p(p-10)(p-10)(p-12)};\ r = \frac{S}{p},\ p = \frac{12+10+10}{2} = 16 \text{ (см)};$$

$$S = \sqrt{16 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = 4 \cdot 6 \cdot 2 = 48 \text{ (см}^2\text{)},\ r = \frac{48}{16} = 3 \text{ (см)}.$$

Т.е. $OM = DO = 3$ см, $DM = 3\sqrt{2}$ (см).

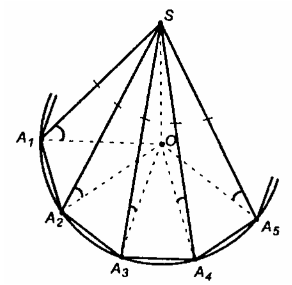
$S_{бок} = S_{ADC} + S_{ADB} + S_{BCD}$,

$$S_{бок} = \frac{1}{2} AC \cdot DN + \frac{1}{2} AB \cdot DM + \frac{1}{2} BC \cdot DK =$$

$$= \frac{1}{2} DM(AC + CB + BA) = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 32 = 16 \cdot 3\sqrt{2} = 48\sqrt{2} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ: $48\sqrt{2}$ (см^2).

249.



Пусть SO – высота пирамиды, в основании которой лежит n-угольник. Далее, пусть SA_1, SA_2, SA_3, …, SA_4, – наклонные.

а) Т.к. равные наклонные, проведенные из одной точки, имеют равные проекции на плоскость основания, то $OA_1=OA_2=OA_3=\ldots=OA_n$.

Т.е. точка O равноудалена от всех вершин многоугольника, и следовательно, является центром описанной окружности около n-угольника.

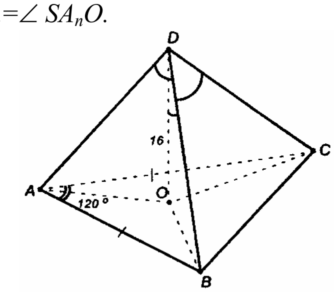
Значит, мы доказали, что высота SO проходит через центр окружности, вписанной в основание

б) Угол между прямой и плоскостью – это угол между наклонной (прямой) и ее проекцией на эту плоскость.

$\Delta SOA_1=\Delta SOA_2=\Delta SOA_3=\ldots=\Delta SOA_n$, (по общему катету и наклонным, равным по условию).

Следовательно, $\angle SA_1O=\angle SA_2O=\ldots=\angle SA_nO$.

250.

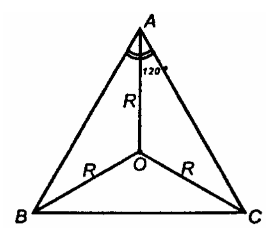


Т. О – основание высоты пирамиды, соединим ее с вершинами ΔABC.

$\Delta DOA=\Delta DOB=\Delta DOC$ – прямоугольные и равный по катету, DO и углам при вершине D, равным 45°.

Тогда, $OA=OC=OB=OD=16$ (см).

По теореме синусов имеем:



$$\frac{BC}{\sin 120^\circ} = 2R, \quad \frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2 \cdot 16 = 32,$$

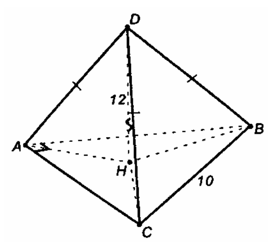
$$BC = \frac{32\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} \text{ (см)},$$

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = 2R = 32, \quad AB = \frac{32}{2} = 16 \text{ (см)};$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin 120^\circ=\frac{16\cdot 16\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 2}=64\sqrt{3}\ (\text{см}^2).$$

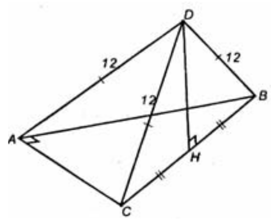
Ответ: $64\sqrt{3}$ (см^2).

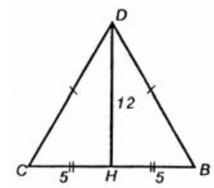
251.



Пусть основание высоты пирамиды – Н. Построим отрезки *HA, HB, HC*.

$\Delta DHA=\Delta DHB=\Delta DHC$ – прямоугольные, *DH* – общий катет, *DA*=*DB*=*DC* по условию. Отсюда *AH*=*BH*=*HC*, точка *H* – центр описанной около ΔABC окружности, а, как известно, в прямоугольном треугольнике он лежит на середине гипотенузы.

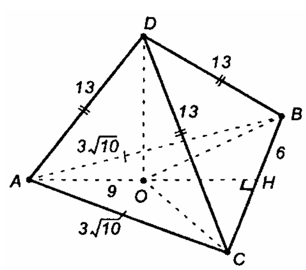




$$x^2+y^2=BD^2=8^2=64\ (\text{см}).$$

Ответ: 13 см.

252.



Пусть *DO* – высота пирамиды, $DO\perp$пл. *ABC*.

Построим отрезки *OA, OB* и *OC*. Т.к. равные наклонные имеют равные проекции, то *OA*=*OB*=*OC*=*R,* где *R* – радиус описанной около ΔABC окружности. *AH* – высота в равнобедренном ΔABC, а также – медиана и биссектриса, потому *CH*=*HB*=3 см.

Из ΔAHC по т. Пифагора имеем:

$$AC=\sqrt{AH^2+HC^2}=\sqrt{9^2+3^2}=\sqrt{81+9}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}\ (\text{см}).$$

Используя формулу $R=\dfrac{abc}{4S_{ABC}}$, получим:

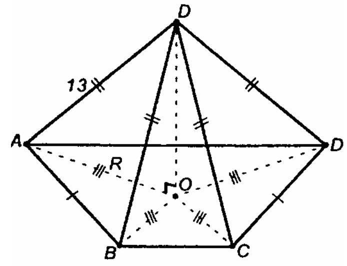
$$R=OC=\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4\cdot\frac{1}{2}\cdot AH\cdot BC}=\frac{3\sqrt{10}\cdot 3\sqrt{10}}{2\cdot 9}=5\ (\text{см}).$$

Из ΔDOC по т. Пифагора имеем:

$DO = \sqrt{DC^2 - CO^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169-25} = \sqrt{144} = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

253.

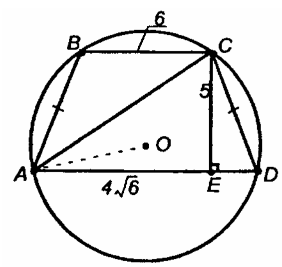


Пусть DO – высота пирамиды, Построим отрезки OA, OB, OC, OD. Равные наклонные имеют равные проекции, то $OA=OB=OC=OD=R$, где R – радиус окружности, описанной около равнобедренной трапеции $ABCD$.

Построим диагональ AC трапеции.

$$R = OA = \frac{AC \cdot CD \cdot AD}{4 \cdot S_{\Delta ACD}},$$

$$ED = \frac{AD - BC}{2} = \frac{4\sqrt{6} - 6}{2} = 2\sqrt{6} - 3 = \sqrt{24} - 3 \text{ (см)},$$



$$CD = \sqrt{CE^2 + ED^2} =$$

$$= \sqrt{5^2 + (\sqrt{24} - 3)^2} = \sqrt{25 + 24 - 6\sqrt{24} + 9} =$$

$$= \sqrt{58 - 6\sqrt{24}} = \sqrt{(3\sqrt{6} - 2)^2} =$$

$$= \left|3\sqrt{6} - 2\right| = 3\sqrt{6} - 2 \text{ (см)},$$

$$\cos\angle CDE = \frac{ED}{CD} = \frac{\sqrt{24} - 3}{3\sqrt{6} - 2}.$$

Из ΔACD по теореме косинусов получим:

$$AC^2 = CD^2 - 2CD \cdot AD \cdot \cos\angle CDE,$$

$$AC^2 = (3\sqrt{6} - 2)^2 + (4\sqrt{6})^2 - 2 \cdot 4\sqrt{6}(3\sqrt{6} - 2) \cdot \frac{\sqrt{24} - 3}{3\sqrt{6} - 2} =$$

$$= 58 - 6\sqrt{24} + 96 - 8\sqrt{6}(2\sqrt{6} - 3) = 154 - 6\sqrt{24} - 96 + 24\sqrt{6} =$$

$$=58 - 12\sqrt{6} + 24\sqrt{6} = 58 + 12\sqrt{6} = (3\sqrt{6} + 2)^2, \text{ откуда}$$

$$AC = \sqrt{(3\sqrt{6} + 2)^2} = \left|3\sqrt{6} + 2\right| = 3\sqrt{6} + 2 \text{ (см)}.$$

$$R = \frac{(3\sqrt{6} + 2)(3\sqrt{6} - 2)4\sqrt{6}}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{6} \cdot 5} = \frac{54 - 4}{10} = \frac{50}{10} = 5 \text{ (см)};$$

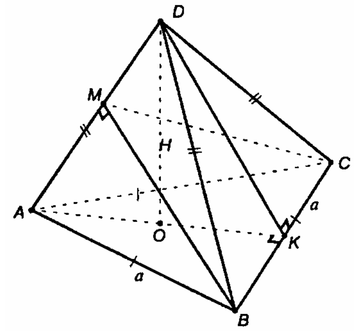
AO=5 см.

Из ΔADO по т. Пифагора получим:

$$DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{169 - 25} = 12 \text{ (см)}.$$

Ответ: 12 см.

254.



Пусть точка O – центр правильного ΔABC. Построим $AK \perp BC$ и отрезок DK. По теореме о 3-х перпендикулярах $DK \perp BC$.

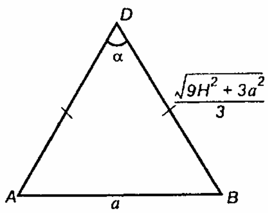
а) В правильной пирамиде все боковые ребра равны, поэтому достаточно вычислить длину ребра AD.

$OA=R$, R – радиус описанной около ΔABC окружности.

$$\frac{BC}{\sin\angle BAC} = 2R, \text{ или } \frac{a}{\sin 60^\circ} = 2R,\ R = \frac{a}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}},\ AO = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Из ΔAOD по т. Пифагора имеем:

$$AD = \sqrt{DO^2 + AO^2} = \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{3}{3}\cdot\frac{3H^2 + a^2}{3}} = \frac{\sqrt{9H^2 + 3a^2}}{3}.$$



б) $\Delta ADB=\Delta BDC=\Delta ADC$ (по трем сторонам), отсюда следует, что плоские углы при вершине пирамиды равны.

По теореме косинусов имеем:

$AB^2=AD^2=DB^2 - 2AD\cdot DB\cdot\cos\alpha$,

$$a^2 = \frac{9H^2 + 3a^2}{9}\cdot 2 - 2\cdot\frac{9H^2 + 3a^2}{9}\cos\alpha,$$

$$9a^2 = 18H^2 + 6a^2 - 2(9H^2 + 3a^2)\cos\alpha,$$

$$2(9H^2 + 3a^2)\cos\alpha = 18H^2 - 3a^2.$$

$$\cos\alpha = \frac{18H^2 - 3a^2}{2(9H^2 + 3a^2)} = \frac{3(6H^2 - a^2)}{2\cdot 3(9H^2 + a^2)} = \frac{6H^2 - a^2}{2(3H^2 + a^2)},$$

$$\alpha = \arccos\frac{6H^2 - a^2}{2(3H^2 + a^2)}.$$

в) Из ΔDAO имеем:

$$tg\angle DAO = \frac{OD}{AO} = \frac{H\cdot\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}H}{a},\ \angle DAO = arctg\frac{\sqrt{3}H}{a}.$$

Все боковые ребра составляют с плоскостью основания одинаковые углы. Это следует из равенства $\Delta DAO = \Delta DBO = \Delta DCO$.

г) Все боковые грани наклонены к плоскости основания под одинаковым углом.

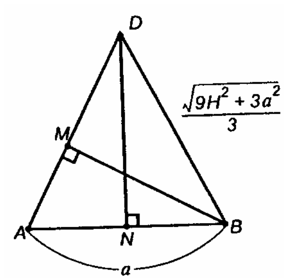
Из ΔDOK имеем:

$$tg\angle DOK = \frac{DO}{OK}.$$

$OK = r$, r – радиус вписанной окружности в ΔABC.

$$r = \frac{S_{ABC}}{p},\ p = \frac{3a}{2},\ S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},\ r = \frac{a^2\sqrt{3}\cdot 2}{4\cdot 3\cdot a} = \frac{a}{2\sqrt{3}},$$

$$tg\angle DKO = \frac{H}{r} = \frac{2\sqrt{3}H}{a},\ \angle DKO = arctg\frac{2\sqrt{3}H}{a}.$$



д) $\Delta BAD = \Delta CAD$. Построим $BM \perp AD$ и отрезок MC. $MC \perp AD$ (в силу равенства треугольников).

$\angle BMC$ – линейный угол двугранного угла при боковом ребре пирамиды. Т.к. пирамида – правильная, то все двугранные углы при боковых ребрах имеют одинаковые линейные углы.

Построим $DN \perp AB$. По т. Пифагора имеем:

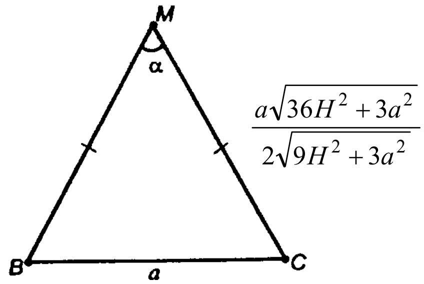
$$DN = \sqrt{DB^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9H^2+3a^2}{9} - \frac{a^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{36H^2+12a^2-9a^2}{9\cdot 4}} = \sqrt{\frac{36H^2+3a^2}{36}};$$

$$S_{ADB} = \frac{1}{2}AB\cdot DN = \frac{1}{2}MB\cdot AD,\text{ или}$$

$$a\cdot\frac{\sqrt{36H^2+3a^2}}{6} = MB\cdot\frac{\sqrt{9H^2+3a^2}}{3},\text{ значит,}$$

$$MB = \frac{a\sqrt{36H^2+3a^2}\cdot 3}{6\sqrt{9H^2+3a^2}} = \frac{a\sqrt{36H^2+3a^2}}{2\sqrt{9H^2+3a^2}}.$$



По теореме косинусов имеем:

$$a^2=\frac{a^2(36H^2+3a^2)}{4(9H^2+3a^2)}\cdot 2-2\cdot\frac{a^2(36H^2+3a^2)}{4(9H^2+3a^2)}\cos\alpha\,,$$

$$2(9H^2+3a^2)=36H^2+3a^2-(36H^2+3a^2)\cos\alpha\,,$$

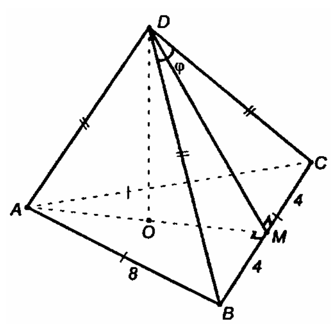
$$(36H^2+3a^2)\cos\alpha=36H^2+3a^2-18H^2-6a^2\,,$$

$$(36H^2+3a^2)\cos\alpha=18H^2-3a^2\,,$$

$$\cos\alpha=\frac{3(6H^2-a^2)}{3(12H^2+a^2)}=\frac{6H^2-a^2}{12H^2+a^2}\,,\ \ \alpha=\arccos\frac{6H^2-a^2}{12H^2+a^2}\,.$$

Ответ: а) $\frac{\sqrt{9H^2+3a^2}}{3H}$; б) $\arccos\frac{6H^2-a^2}{2\left(3H^2+a^2\right)}$; в) $arctg\frac{\sqrt{3}H}{a}$; г) $arctg\frac{2\sqrt{3}H}{a}$; д) $\arccos\frac{6H^2-a^2}{12H^2+a^2}$.

255.



Пусть DO – высота пирамиды, а точка O – центр правильного ΔABC. В правильной пирамиде все плоские углы при вершине равны. Построим $AM\perp BC$ и отрезок DM. По теореме о 3-х перпендикулярах имеем: $DM\perp BC$.

Из ΔBDM: $tg\frac{\varphi}{2}=\frac{BM}{DM}=\frac{4}{M}$,

ΔBDC – равнобедренный, DM – его высота, а значит, DM – его медиана и биссектриса.

Из ΔDOM по т. Пифагора имеем: $DM=\sqrt{DO^2+OM^2}$.

OM – радиус вписанной окружности,

$$OM = \frac{S_{\Delta ABC}}{p},\ p = \frac{8+8+8}{2} = 12,\ S_{\Delta ABC} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = \frac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3},$$

$$OM = \frac{16\sqrt{3}}{12} = \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{\sqrt{3}};$$

$$\begin{cases} tg\,\frac{\varphi}{2} = \frac{4}{DM}, \\ DM = \sqrt{DO^2 + \frac{16}{3}}; \end{cases}$$

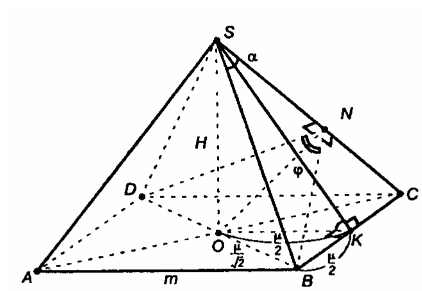
$$DM = \frac{4}{tg\,\frac{\varphi}{2}},\ DM^2 = \frac{16}{tg^2\,\frac{\varphi}{2}},\ \frac{16}{tg^2\,\frac{\varphi}{2}} = DO^2 + \frac{16}{3},$$

$$DO^2 = \sqrt{\frac{16}{tg^2\,\frac{\varphi}{2}} - \frac{16}{3}} = 4\sqrt{\left(\frac{1}{tg^2\,\frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{3}\right)} = 4\sqrt{\frac{3 - tg^2\,\frac{\varphi}{2}}{3tg^2\,\frac{\varphi}{2}}} = 4\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{3}tg^2\,\frac{\varphi}{2}}{tg^2\,\frac{\varphi}{2}}},$$

$$DO = 4\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{3}tg^2\,\frac{\varphi}{2}}}{tg\,\frac{\varphi}{2}}.$$

Ответ: $\dfrac{4}{tg\,\frac{\varphi}{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3}tg^2\,\frac{\varphi}{2}}$.

256.



Пусть SO – высота пирамиды, а точка O – центр квадрата $ABCD$. Т.к. в правильной пирамиде все боковые грани – равные треугольники, поэтому все плоские углы при вершине равны α. Все боковые грани составляют с плоскостью основания одинаковый угол, все боковые ребра пирамиды равны, все высоты боковых граней равны. Построим $OK \perp BC$ и отрезок KS. По теореме о 3-х перпендикулярах имеем: $SK \perp BC$, SK – высота в равнобедренном ΔBSC.

а) $DB = m\sqrt{2}$, $OB = \frac{1}{2}DB = \frac{m\sqrt{2}}{2} = \frac{m}{\sqrt{2}}$.

Из ΔSOC по т. Пифагора имеем $SK = \sqrt{H^2 + OK^2} = \sqrt{H^2 + \frac{m^2}{4}}$.

Из ΔBKS имеем: $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{BK}{SK} = \frac{m}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4H^2 + m^2}} = \frac{m}{\sqrt{4H^2 + m^2}}$,

$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{m}{\sqrt{4H^2 + m^2}}$; $(4H^2 + m^2)tg^2\frac{\alpha}{2} = m^2$,

$4H^2 + m^2 = \frac{m^2}{tg^2\frac{\alpha}{2}}$; $4H^2 = \frac{m^2}{tg^2\frac{\alpha}{2}} - m^2 = m^2(\frac{1}{tg^2\frac{\alpha}{2}} - 1) = m^2\frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{tg^2\frac{\alpha}{2}}$,

$$H = \frac{m}{2tg\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{m \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{m\cos\frac{\alpha}{2}}{2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos\alpha}.$$

б) Из ΔBSK: $SB = \frac{BK}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

в) $SK \perp BC$, $OK \perp BC$.

Тогда, $\angle SKO$ – линейный угол двугранного угла, образованного боковой гранью с плоскостью снования пирамиды.

Из ΔSOK:

$\cos\angle SKO = \frac{OK}{SK} = \frac{m}{2 \cdot SK}$,

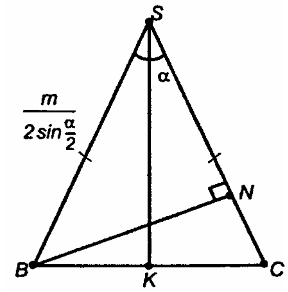
$\frac{BK}{SK} = tg\frac{\alpha}{2}$, $\frac{m}{2 \cdot SK} = tg\frac{\alpha}{2}$, отсюда $\cos\angle SKO = tg\frac{\alpha}{2}$,

$\angle SKO = \arccos(tg\frac{\alpha}{2})$.

г) Построим $BN \perp SC$ и отрезок ND. Из равенства $\Delta BSC = \Delta DSK$ получим $BN = DN$, $DN \perp SC$.

$\angle BND = \varphi$ – линейный угол двугранного угла.

Из ΔBSN: $BN = BS \cdot \sin\alpha$,



$$BN = \frac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \sin\alpha =$$

$$= \frac{m \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = m\cos\frac{\alpha}{2}.$$

ΔBNO – равнобедренный, NO – его высота, значит, также медиана и биссектриса, $\angle BNO = \frac{\varphi}{2}$.

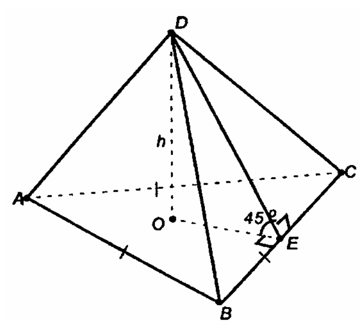
$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{OB}{BN} = \frac{m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{m\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$\frac{\varphi}{2} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$, - это половина искомого угла, тогда

$$\varphi = 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Ответ: а) $\frac{m\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$; б) $\frac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$; в) $\arccos(tg\frac{\alpha}{2})$; г) $2\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right)$.

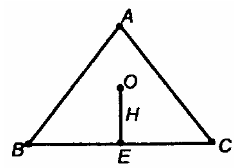
257.



Т.к. $DABS$ – правильная пирамида, то точка O, являющаяся основанием высоты DO, есть центр правильного ΔABC.

Построим $OE \perp BC$ и отрезок DE. По теореме о 3-х перпендикулярах имеем $DE \perp BC$; тогда, $\angle DEO$ – линейный угол двугранного угла при основании, $\angle DEO = 45^{\circ}$. В правильной пирамиде все двугранные углы при основании одинаковы.

$DO = OE = h,$ тогда $DE = h\sqrt{2}.$



$OE = r = h,$ где r – радиус вписанной окружности.

Пусть сторона правильного ΔABC равна x.

$$S_{ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4},\ p = \frac{3x}{2},\ r = \frac{S_{ABC}}{p},$$

$$r = h = \frac{x\sqrt{3}\cdot 2}{4\cdot 3x} = \frac{x}{2\sqrt{3}},\quad x = 2\sqrt{3}h;\ \text{тогда}$$

$$S_{ABC} = \frac{(2\sqrt{3}h)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4\cdot 3\cdot\sqrt{3}\cdot H^2}{4} = 3\cdot\sqrt{3}h^2,\ \text{и}$$

$$S_{\Delta BCD} = S_{\Delta ADC} = S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}x\cdot DE = \frac{1}{2}2\sqrt{3}h\cdot h\cdot\sqrt{2} = h^2\sqrt{6},\ \text{а}$$

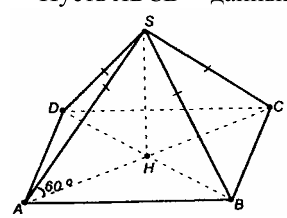
$S_{бок} = 3S_{\Delta BCD} = 3\sqrt{6}h^2$, значит, $S_{полн.пов.} = S_{ABC} + S_{бок} =$

$= 3\sqrt{6}h^2 + 3\sqrt{3}h^2 = 3\sqrt{3}h^2(\sqrt{2}+1).$

Ответ: $3\sqrt{3}h^2(\sqrt{2}+1).$

258.

Пусть $ABCD$ – данный квадрат, H – центр квадрата;



$\Delta SHA = \Delta SHC = \Delta SHB = \Delta SHD$.

Из ΔSHA: $AH = 6$ (см).

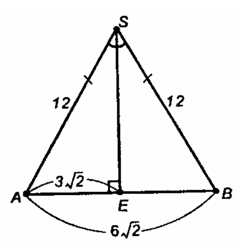
Пусть сторона квадрата равна x см.

$AC = 2AH = 12$ (см),

$12 = x\sqrt{2},\ x = 6\sqrt{2}$ (см),

$S_{ABCD} = (6\sqrt{2})^2 = 72$ (см^2).

$$S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2}AB\cdot SE.$$



Из ΔAES по т. Пифагора имеем:

$$SE = \sqrt{AS^2 - AE^2} = \sqrt{144-18} = \sqrt{126},$$

$$S_{\Delta ASB} = \frac{1}{2}6\sqrt{2}\cdot\sqrt{126} = 3\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 3\cdot\sqrt{7} =$$

$= 9\cdot 2\cdot\sqrt{7} = 18\sqrt{7}$ (см^2).

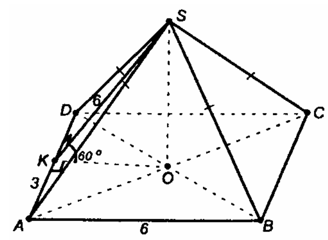
$\Delta SAB = \Delta SAD = \Delta SDC = \Delta SBC$ (по трем сторонам). Следовательно, их площади тоже равны.

$S_{бок} = 4S_{\Delta ASB} = 4\cdot 18\sqrt{7} = 72\sqrt{7}$ (см^2),

$S_{полн.пов.} = S_{ABCD} = S_{бок} = 72 + 72\sqrt{7} = 72(\sqrt{7}+1)$ (см^2).

Ответ: $72(1+\sqrt{7}\,)$ см^2.

259.



$OK = \frac{1}{2}AB = \frac{6}{2} = 3$ (см).

Из прямоугольного ΔOKS имеем:

$KS = \frac{OK}{\sin 30^\circ} = 2 \cdot 3 = 6$ (см).

$AK = \frac{1}{2}DA = 3$ (см).

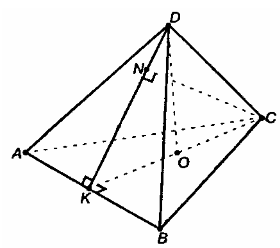
Из ΔAKS по т. Пифагора имеем:

$$AS = \sqrt{KS^2 + KA^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ (см)}.$$

Т.к. в правильной пирамиде все боковые ребра равны, то $SA = SB = SC = SD = 3\sqrt{5}$ (см).

Ответ: $3\sqrt{5}$ см.

260.



Плоскость DKS – искомая плоскость α.

а) Плоскость α проходит через точки D, C, O. Продолжим отрезок CO до пересечения его со стороной AB в точке K.

Т.к. т. O – центр правильного ΔABC, то CO (а значит, и CK) – биссектриса угла ACB, следовательно, CK – медиана и высота в ΔABC. Тогда $CK \perp AB$.

Поскольку:

1) $CK \perp AB$.
2) ($DO \perp AB$).
3) CK и DO пересекаются, образуя плоскость α.

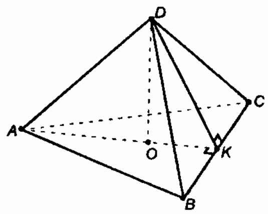
То $AB \perp$ пл. α, т.к. она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в пл. α.

б) По теореме о 3-х перпендикулярах имеем: $DK \perp AB$. DK апофема пирамиды.

Построим $CN \perp DK$.
По построению $CN \perp AB$,
т.к. пл. $\alpha \perp AB$,
$CN \perp$ пл. α.

Т.к. CN перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в пл. ADB, то $CN \perp$ пл. ADB.

261.



Пусть DO – высота правильной пирамиды, а O – центр ΔABC.

Продолжим AO до пересечения с BC в точке K. AO – биссектриса $\angle BAC$, следовательно, AK – тоже биссектриса в правильном ΔABC, т.е. AK – медиана и высота, $AK \perp BC$.

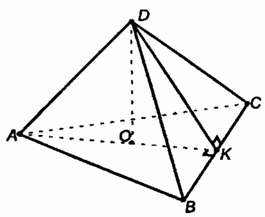
По теореме о 3-х перпендикулярах $DK \perp BC$.

Т.к. BC ⊥ DK и BC ⊥ AK, то BC ⊥ пл. APK.

Тогда $BC \perp AD$.

Т.к. ΔABC правильный, то доказательство справедливо для любой пары скрещивающихся ребер. Значит, $DC \perp AB$ и $AC \perp DB$.
Что и требовалось доказать.

262.



Пусть DO – высота пирамиды, а т. O – центр правильного ΔABC.

Боковые грани есть равные равнобедренные треугольники. Построим грани DBC, высоту боковой грани DK.

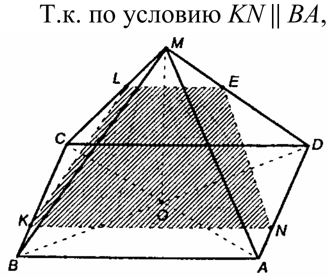
$DK \perp BC$. Т.к. DK – высота в равнобедренном ΔBDC, то $BK=KC$. Построим отрезок AK. Точки A, O и K лежат на одной прямой AK, поскольку по построению, AK – медиана в равностороннем ΔABC, а т. O – центр ΔABC. $AK \perp BC$.

Т.к. $BC \perp DK$ и $BC \perp AK$, то $BC \perp$ пл. APK.

Т.к. плоскость BDC проходит через прямую BC, перпендикулярную к плоскости ADK, то, значит, пл. ADK (или пл. DOK)$\perp$пл. BDC.
Что и требовалось доказать.

263.

Т.к. по условию $KN \parallel BA$, то $KN \parallel CD$, значит, $KN \parallel$ пл. CMD.

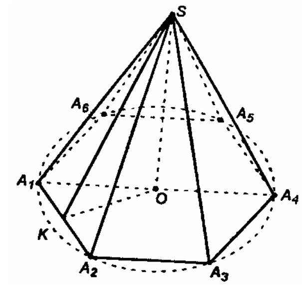


а) Т.к. секущая плоскость LKN проходит через прямую KN, параллельную плоскости CMD, и пересекает эту плоскость (т. $L \subset$ пл. CMD), то линия пересечения, проходящая через т. L, будет параллельна KN. Отсюда следует построение: через т. L построим $LE \parallel CD$ ($CD \parallel KN$, поэтому $LE \parallel KN$) и в плоскости грани ADM построим отрезок NE.

Искомое сечение – 4-угольник $KLEN$. $LE \parallel KN$, следовательно $KLEN$ – трапеция.

б) $KL \parallel MB$ (по условию); $KN \parallel AB$ (по условию). $\Big\}$ Следовательно, по признаку параллельности двух плоскостей, плоскости AMB и KLN параллельны.

264.



Большая диагональ основания равна диаметру окружности, писанной около правильного 6-угольника $A_1A_2...A_6$. Построим $OK \perp A_1A_2$. A_1A_2 равен радиусу вписанной окружности. Для правильного 6-угольника имеем:

$$A_1A_2 = R,\ OK = r = \frac{A_1A_2\sqrt{3}}{2}.$$

Но $A_1A_2 = a$, значит, $OA_1 = R = a$, $OK = r = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Известно, что в правильной пирамиде все боковые грани – равные равнобедренные треугольники. Рассмотрим грань A_1SA_2.

По теореме о 3-х перпендикулярах имеем $SK \perp A_1A_2$.

$$S_{A_1SA_2} = \frac{1}{2}A_1A_2 \cdot SK = \frac{1}{2}a \cdot SK.$$

Пусть высота пирамиды $SO = H$.

Из ΔSOK по теореме Пифагора имеем:

$$SK = \sqrt{OK^2 + H^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + H^2}.\ (1)$$

Сечение, проходящее через большую диагональ основания и высоту пирамиды – ΔA_1SA_4.

$$S_{A_1A_4} = \frac{1}{2}A_1A_4 \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot H.$$

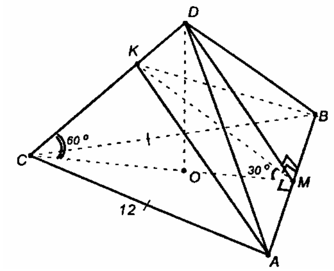
По условию,

$$\frac{1}{2}a \cdot SK = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot H, \text{ следовательно, } SK = 2H,\ SK^2 = 4H^2,\ H^2 = \frac{SK^2}{4}.$$

Из (1) $SK^2 = \dfrac{3a^2}{4} + H^2$, или $SK^2 = \dfrac{3a^2}{4} + \dfrac{SK^2}{4}$; $\dfrac{3}{4}SK^2 = \dfrac{3}{4}a^2$, следовательно, $SK = a$.

$$S_{A_1SA_2} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a = \frac{1}{2}a^2.\ S_{бок} = 6S_{A_1A_2} = 6\frac{a^2}{2} = 3a^2.$$

Ответ: $3a^2$.



265.

Пусть DO – высота правильной пирамиды, т. O – центр ΔABC.

Построим $CM \perp AB$ и отрезок DM.

По теореме о 3-х перпендикулярах имеем $DM \perp AB$. Плоскость $CDM \perp AB$.

В плоскости CDM построим отрезок MK под углом в 30° к отрезку CM.

Т.к. пл. $CDM \perp AB$, а $KM \subset$ пл. CDM, то $KM \perp AB$.

$\left.\begin{array}{l} KM \perp AB; \\ CM \perp AB. \end{array}\right\}$ $\angle KMC = 30^\circ$ – линейный угол двугранного угла при основании пирамиды, образованый плоскостью сечения с основанием пирамиды.

CO – проекция ребра CD на плоскость основания, следовательно, $\angle CO = 60^\circ$, .т.к. в правильной пирамиде все боковые ребра одинаковы и наклонены к плоскости основания под одним углом.

Соединив точки A и K, K и B, получим искомое сечение – ΔAKB; тогда

$S_{\Delta AKB} = \frac{1}{2} KM \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot KM = 6 \cdot KM$, а

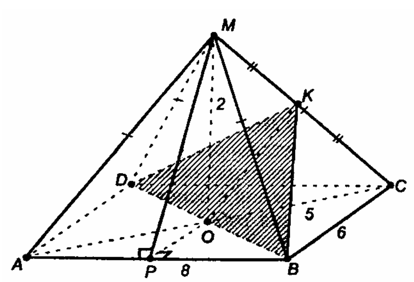
из ΔAMC имеем: $MC = AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ (см), и

из прямоугольного ΔMKC имеем:

$MK = MC \cdot \sin 60^\circ = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 9$ (см), значит,

$S_{\Delta AKB} = 6 \cdot 9 = 54$ (см^2).

Ответ: 54 см^2.



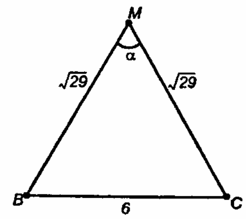
266.

Пусть MO – высота пирамиды. Т.к. $MA=MB=MC=MD$, то $OA = OB = OC = OD$ (равные наклонные имеют равные проекции). Следовательно, точка O равноудалена от вершин прямоугольника. В прямоугольнике таким свойством обладает точка пересечения его диагоналей, следовательно, точка O – точка пересечения диагоналей прямоугольника.

Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ основания BD параллельно ребру MA.

В плоскости MOC построим $OK \parallel MA$ и проведем отрезки BK и DK.

$MA \parallel OK$, $OK \subset$ пл. DKB, следовательно, $MA \parallel$пл. DKB, ΔDKB – искомое сечение.



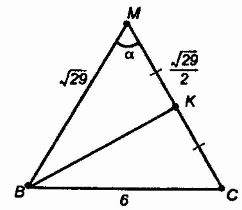
Из ΔBMC по теореме косинусов имеем:

$BC^2 = MB^2 + MC^2 - 2MB \cdot MC \cdot \cos\alpha$,

$36 = 2 \cdot 29 - 2 \cdot 29 \cdot \cos\alpha$,

$2 \cdot 29 \cdot \cos\alpha = 58 - 36 = 22$,

$\cos\alpha = \dfrac{11}{29}$.

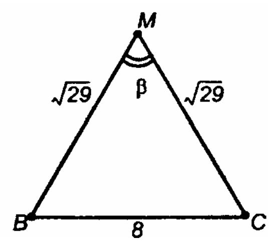


В ΔAMC OK – средняя линия, т.е. $MK{=}KC$.

$BK^2 = 29 + \dfrac{29}{4} - \dfrac{2\sqrt{29} \cdot \sqrt{29} \cdot 11}{2 \cdot \sqrt{29}} =$

$= 29 + \dfrac{29}{4} - 11 = \dfrac{72+29}{4} = \dfrac{101}{4}$, значит,

$BK = \dfrac{\sqrt{101}}{2}$ (дм).

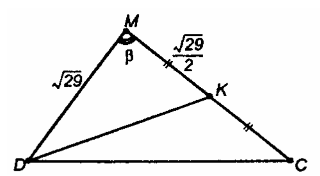


Из ΔMDC по т. косинусов имеем:

$DC^2 = MD^2 + MC_2 - 2 \cdot MD \cdot MC \cdot \cos\beta$,

$64 = 2 \cdot 29 - 2 \cdot 29 \cdot \cos\beta$, $2 \cdot 29 \cdot \cos\beta = -6$,

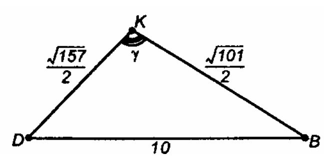
$\cos\beta = -\dfrac{3}{29}$,



$DK^2 = 29 + \dfrac{29}{4} - 2\sqrt{29}\,\dfrac{\sqrt{29}}{2}\left(-\dfrac{3}{29}\right) =$

$= 29 + \dfrac{29}{4} + 3 = \dfrac{128+29}{4} = \dfrac{157}{4}$, значит,

$DK = \dfrac{\sqrt{157}}{2}$ (дм).



Из ΔBDK по т. косинусов имеем:

$DB^2 = DK^2 + BK^2 - 2 \cdot DK \cdot BK \cdot \cos y$,

$100 = \dfrac{157}{4} + \dfrac{101}{4} - \dfrac{2 \cdot \sqrt{157} \cdot \sqrt{101}}{2 \cdot 2}\cos y$,

$$100 = \frac{129}{2} - \frac{\sqrt{157} \cdot \sqrt{101}}{2} \cos y,$$

$$\sqrt{157 \cdot 101} \cdot \cos y = 129 - 200 = -71,$$

$$\cos y = -\frac{71}{\sqrt{157 \cdot 101}}.$$

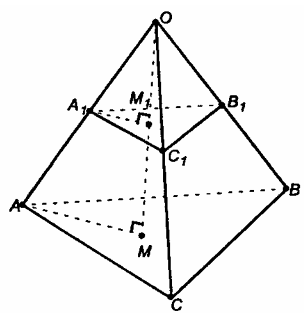
Т.к. $\cos^2 y + \sin^2 y = s$, то

$$\sin y = \sqrt{1 - \frac{71^2}{157 \cdot 101}} = \sqrt{1 - \frac{5041}{157 \cdot 101}} = \sqrt{1 - \frac{5041}{15857}} = \sqrt{\frac{10816}{157 \cdot 101}} = \frac{104}{\sqrt{157} \cdot \sqrt{101}};$$

$$S_{\Delta DKB} = \frac{1}{2} DK \cdot KB \cdot \sin y = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{157} \cdot \sqrt{101}}{2 \cdot 2} \cdot \frac{104}{\sqrt{157} \cdot \sqrt{101}} = \frac{104}{8} = 13 \text{ (дм}^2\text{)}.$$

Ответ: 13 дм^2.

267.



Если в основании пирамиды лежит многоугольник, то его можно всегда разбить диагоналями на треугольники, и значит, n-угольная пирамида будет состоять из многих треугольных пирамид. Докажем данное свойство для треугольной пирамиды.

Пл. $A_1B_1C_1 \parallel$ пл. ABC.

Линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей – параллельны, следовательно, $A_1C_1 \parallel AC$, $B_1C_1 \parallel AB$, $C_1B_1 \parallel CB$, и $\Delta OA_1C_1 \sim \Delta OAC$, следовательно,

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA}.$$

Пусть OM – высота пирамиды.

Прямоугольные треугольники A_1OM_1 и AOM подобны по общему острому углу при вершине O, значит,

$$\frac{OA_1}{OA} = \frac{OM_1}{OM}.$$

Тогда, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{OA_1}{OA} = \frac{OM_1}{OM}$.

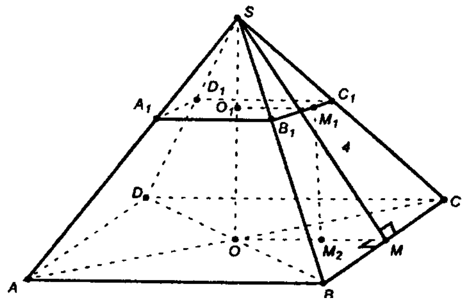
Т.к. утверждение доказано для одной произвольно выбранной грани, то пропорциональность частей, на которые плоскость делит высоту и боковые ребра других граней, остается в силе.

268.

Боковые грани усеченной пирамиды – трапеции. Т.к. данная усеченная пирамида получена из правильной 4-угольной пирамиды, то ее боковые грани – равные равнобедренные трапеции.

Построим $OM \perp BC$, $M_1M_1 \perp B_1C_1$, и отрезок M_1M. По теореме о 3-х перпендикулярах имеем: $M_1M \perp BC$ ($M_1M \perp B_1C_1$), т.е. M_1M – апофема усеченной пирамиды, M_1M=4 дм.

$\Delta\, SB_1C_1 \sim \Delta\, SBC$, и $\Delta\, SO_1M_1 \sim \Delta\, SOM$, т.к. они – прямоугольные и имеют общий острый угол при вершине S, тогда имеем:



$\frac{SO_1}{SO} = \frac{O_1M_1}{OM} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{1}{3}$.

Построим $M_1M_2 \perp OM$;

$OM_2 = O_1M_1$.

Пусть высота усеченной пирамиды $OO_1=h$. Тогда из ΔM_1M_2M по т. Пифагора имеем:

$M_2M = \sqrt{M_1M^2 - h^2} = \sqrt{16^2 - h^2}$,

$\frac{O_1M_1}{O_1M_1 + \sqrt{16-h^2}} = \frac{1}{3}$, отсюда $O_1M_1 = \frac{1}{2}\sqrt{16-h^2}$,

$A_1B_1 = 2 \cdot O_1M_1 = \sqrt{16-h^2}$, тогда

$S_{A_1B_1C_1D_1} = A_1B_1^2 = 16 - h^2$ (дм^2);

$AB = 2 \cdot OM = 2(\frac{1}{2}\sqrt{16^2-h^2} + \sqrt{16^2-h^2}) = 3\sqrt{16^2-h^2}$, тогда

$S_{ABCD} = AB^2$, $S_{ABCD} = 9(16-h^2)$, а

$S_{BB_1C_1C} = \frac{B_1C_1 + BC}{2} \cdot M_1M =$

$= \frac{\sqrt{16^2-h^2} + 3\sqrt{16^2-h^2}}{2} \cdot 4 = 8\sqrt{16^2-h^2}$ (дм^2),

$4 \cdot S_{BB_1C_1C} + S_{ABCD} + S_{A_1B_1C_1D_1} = 186.$

Получим уравнение $(16 - h^2) + 9(16 - h^2) + 4 \cdot 8\sqrt{16^2 - h^2} = 186.$

Введем замену: $z = \sqrt{16^2 - h^2}$, $z > 0$, тогда

$10z^2 + 32z - 186 = 0$;

$5z^2 + 16z - 93 = 0$;

$$z_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 465}}{5} = \frac{-8 \pm \sqrt{529}}{5} = \frac{-8 \pm 23}{25},$$

$z_1 = -\frac{31}{5}$ не подходит по смыслу задачи, т.к. $z > 0$;

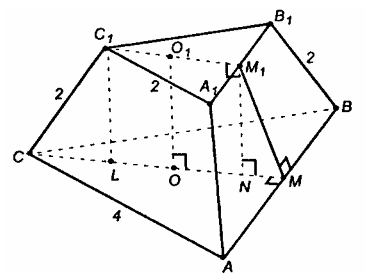
$z_2 = \frac{15}{5} = 3$ (дм).

$\sqrt{16^2 - h^2} = 3$; $16 - h^2 = 9$, $h^2 = 7$.

$h = \sqrt{7}$ (дм).

Ответ: $\sqrt{7}$ дм.

269.



Т.к. усеченная пирамида – правильная, то боковые грани – равные равнобедренные трапеции.

Построим $CM \perp AB$, $O_1M_1 \perp A_1B_1$ и отрезок M_1M. По теореме о 3-х перпендикулярах $M_1M \perp AB$ (и $M_1M \perp A_1B_1$); т.е. M_1M – апофема пирамиды.

O_1O – высота пирамиды.

Пусть $O_1O = h$, $M_1M = a$.

Построим $C_1L \perp CM$, $C_1L = O_1O = M_1N = h$.

OC и O_1C_1 – радиусы описанных окружностей ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$.

$$OC = \frac{AB}{2\sin 60^\circ} = \frac{4}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ (дм)},$$

$$O_1C_1 = \frac{A_1B_1}{2\sin 60^\circ} = \frac{2}{2\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ (дм)},$$

$CL = \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (дм).

Из прямоугольного ΔCC_1L по т. Пифагора имеем:

$C_1L = h = \sqrt{C_1C^2 - CL^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ (дм),

$C_1M_1 = C_1M_1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (дм),

$O_1M_1 = \sqrt{3} - O_1C_1 = \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (дм),

$CM = CA \cdot \sin 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (дм),

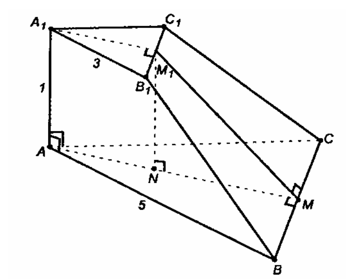
$OM = CM - CO = 2\sqrt{3} - \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (дм),

$NM = OM - ON = OM - O_1M_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (дм).

Из прямоугольного ΔM_1NM по т. Пифагора имеем:

$M_1M = a = \sqrt{h^2 + NM^2} = \sqrt{\frac{8}{3} + \frac{1}{3}} = \sqrt{3}$ дм.

270.



$B_1B = C_1C$, значит, трапеция B_1C_1CB — равнобедренная.

Построим $AM \perp BC$, $A_1M_1 \perp B_1C_1$, отрезок M_1M. По теореме о 3-х перпендикулярах имеем: $M_1M \perp BC$ ($M_1M \perp B_1C_1$), следовательно, M_1M – высота боковой грани. Построим $M_1N \perp AM$.

Из $\Delta A_1M_1B_1$ имеем:

$A_1M_1 = A_1B_1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Из ΔAMB имеем:

$AM = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2}$,

$$NM = AM - AN = AM - A_1M_1 = \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ (\text{см}).$$

Из ΔM_1NM по т. Пифагора имеем:

$$M_1M = \sqrt{NM_1^2 + NM^2} = \sqrt{1+3} = 2\ (\text{см});$$

$$S_{B_1C_1CB} = \frac{B_1C_1 + BC2}{2} \cdot M_1M = \frac{3+5}{2} \cdot 2 = 8\ (\text{см}^2),$$

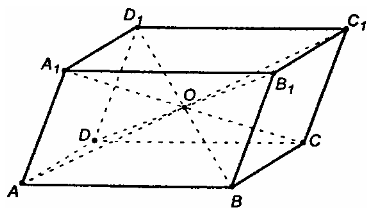
$$S_{AA_1B_1B} = \frac{1}{2}(3+5) \cdot 1 = 4\ (\text{см}^2),$$

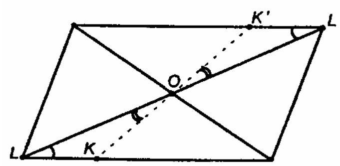
$$S_{AA_1C_1C} = S_{AA_1B_1B} = 4\ (\text{см}^2),$$

$$S_{бок} = S_{B_1C_1CB} + S_{AA_1B_1B} + S_{AA_1C_1C} = 8 + 4 + 4 = 16\ (\text{см}^2).$$

Ответ: 16 см^2.

276.

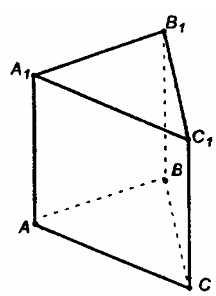




По определению точка называется центром симметрии фигуры, если каждая точка фигуры симметрична относительно нее некоторой точке той же фигуры.

а) Диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам.

Сечение параллелепипеда произвольной плоскостью, содержащей точку O, есть параллелограмм, стороны которого – линии пересечения секущей плоскости с гранями параллелепипеда. Пусть точки K и K' – произвольные точки противоположных граней, через которые проходит секущая плоскость. Т.к. $\Delta LOK = \Delta L'OK'$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам), то $OK = OK'$, а это означает симметрию точек K и K' относительно точки O.



Поскольку плоскость сечения выбрана произвольно, то любые две точки противоположных граней будут симметричны относительно т. O.

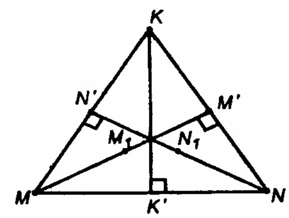
Т.к. диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке, то точка O – единственная. Отсюда следует, что параллелепипед имеет одну точку симметрии.

б) Не имеет центра симметрии.

Рассмотрим самый простой случай: построим плоскость, перпендикулярную к боковому ребру призмы и проходящую через середину этого ребра. Она будет плоскостью симметрии правильной призмы.

Возьмем на ребрах точки M, N, K.

N и N' симметричны относительно точки N_1. M и M' симметричны относительно точки M_1. Даже в простейшем случае эти точки не совпадают.



в) Двугранный угол не имеет центра симметрии.

г) Середина отрезка – его единственный центр симметрии.

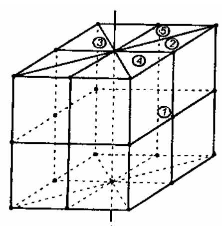
277.

а) Отрезок на плоскости имеет ровно одну ось симметрии; в пространстве – бесконечно много;

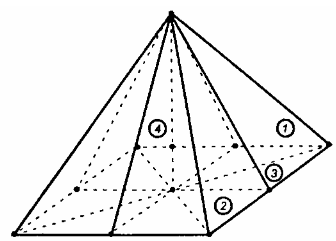
б) правильный треугольник имеет три оси симметрии;

в) куб имеет 9 осей симметрии.

278.



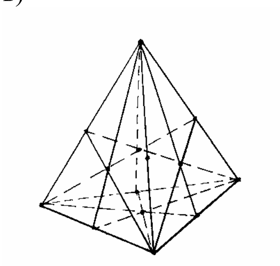
а) Правильная четырехугольная призма имеет 5 плоскостей симметрии

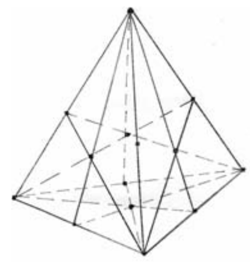


б) Две плоскости, проходящие через высоту и боковые ребра, а также две плоскости, проходящие через высоту и апофемы боковых граней, являются плоскостями симметрии.

Т.е. правильная четырехугольная пирамида имеет всего 4 плоскости симметрии.

в)

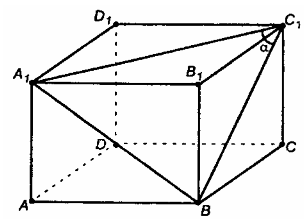




1) Если тетраэдр не является правильным, то 3 плоскости симметрии.

2) Если тетраэдр является правильным, то 6 плоскостей симметрии.

279. Пусть ребро куба a, α – искомый угол.



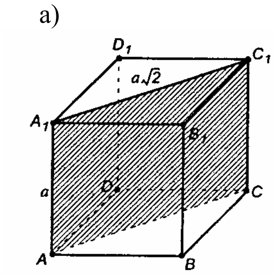
Диагонали граней равны $A_1B = A_1C_1 = BC_1 = a\sqrt{2}$.

Следовательно, $\Delta\, A_1C_1B$ – равносторонний, т.е. $\alpha = \dfrac{180^{\circ}}{3} = 60^{\circ}$.

Ответ: 60°.

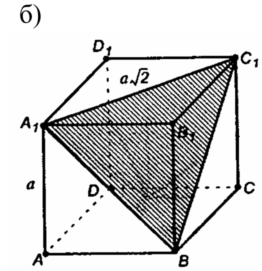
280. Рассмотрим 2 случая:

а)



Пусть $AA_1=a$.
Искомое сечение – прямоугольник AA_1C_1C.

б)



Пусть $AA_1=a$.
Искомое сечение – правильный $\Delta\, A_1C_1B$.

$S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot A_1C_1 =$

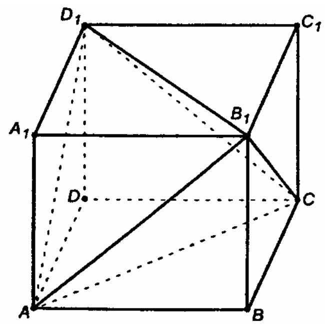
$= a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$.

$S_{\Delta A_1C_1B} = \dfrac{(a\sqrt{2})^2}{4} =$

$= \dfrac{a^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: а) $a^2\sqrt{2}$; б) $a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

281.



Правильный тетраэдр состоит из 4-х равносторонних треугольников.

Все его ребра являются диагоналями граней куба, тогда, все ребра тетраэдра равны, грани его – правильные треугольники, и тетраэдр B_1AD_1C – правильный.

Пусть сторона куба равна a, тогда ребро тетраэдра равно $a\sqrt{2}$.

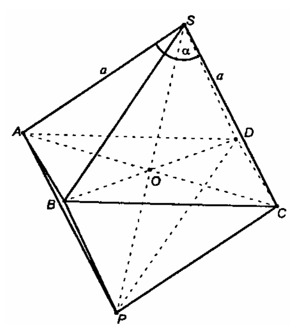
$S_{куба} = 6 \cdot a^2$,

$S_{тетр.} = 4 \cdot S_{AD_1C} = 4 \cdot \dfrac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = a^2 \cdot 2\sqrt{3}$,

$\dfrac{S_{куба}}{S_{тетр}} = \dfrac{6a^2}{a^2 \cdot 2\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

282.



Все углы между ребрами, имеющими общую вершину, одинаковы, т.к. треугольники, в которые входят эти углы, равны между собою.

Пусть ребро октаэдра равно a.

Из ΔABC по т. Пифагора имеем: $AC = a\sqrt{2}$.

Из ΔASC по теореме косинусов имеем:

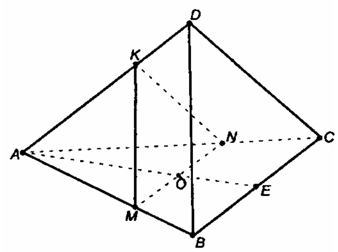
$AC^2 = AS^2 + SC^2 - 2 \cdot AS \cdot SC \cdot \cos\alpha$,

$(a\sqrt{2})^2 = a^2 + a^2 \cdot a \cdot a \cdot \cos\alpha$,

$2a^2 = 2a^2 - 2a^2 \cdot \cos a$, отсюда следует, что $\cos\alpha = 0$, $\alpha = 90^\circ$.

Ответ: 90°.

283.



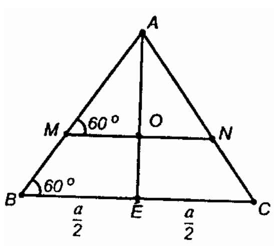
а) Пусть т. O – центр грани ABC.

Построим $MK \parallel DB$, $MN \parallel BC$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{MK} \parallel \text{DB}, \\ \text{MN} \parallel \text{BC} \\ \text{O} \in \text{BC} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{пл. } MKN - \\ \text{искомое сечение.} \end{array}$$

Пусть ребро тетраэдра равно a.

Тогда $AE = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $AO = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$,



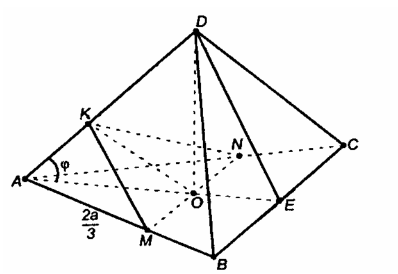
$$AM = \frac{AO}{\sin 60^0} = \frac{2a}{3}.$$

Т.к. ΔADB – равносторонний, а $KM \parallel DB$, то ΔAMK – также равносторонний, $AM=KM=\dfrac{2a}{3}$.

$\angle MKH = \angle BDC$ (углы с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами):

$\angle MKH = 60^{\circ}$.

$$S_{MKN} = \frac{1}{2} \cdot MK \cdot KN \cdot \sin 60^{\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{2a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{9}.$$



б) Построим отрезок $OK \perp AD$ в пл. ADO.

Т.к. пл. $ADO \perp MN$, то $AD \perp MN$.

Т.к. $AD \perp MN$ и $AD \perp OK$, то $AD \perp$пл. MNK

Значит, ΔKMN – искомое сечение,

$$S_{KMN} = \frac{1}{2} \cdot OK \cdot MN.$$

ΔAMN – равносторонний, $MN = AM = \dfrac{2a}{3}$.

$AO = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $OK = AO \cdot \sin\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \sin\varphi$.

Из ΔADE по теореме косинусов имеем:

$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2 \cdot AD \cdot AE \cdot \cos\varphi$,

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\cos\varphi,$$

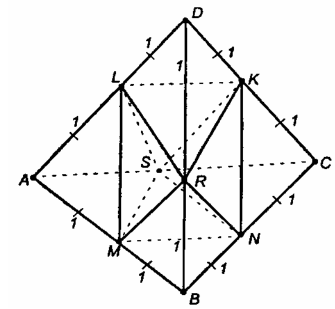
$1 = \sqrt{3}\cos\varphi$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, тогда

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$OK = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{3};\ S_{MKN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2a}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{9}.$$

Ответ: а) $\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$; б) $\frac{a^2\sqrt{2}}{9}$.

284.

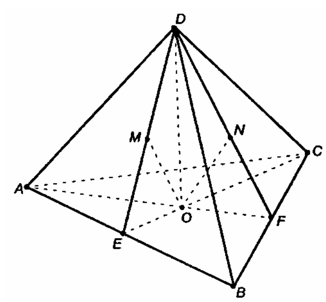


Внутренний многогранник образован средними линиями граней правильного тетраэдра, т.е. все его ребра равны, а грани – правильные, равные друг другу треугольники.

Т.е. получившийся 8-гранник – правильный октаэдр.

Ответ: правильный октаэдр.

285.



Достаточно доказать равенство двух отрезков (т.к. все грани тетраэдра равны, и любая из них может считаться основанием, а 3 другие – боковыми гранями). Рассмотрим ΔOEM и ΔOFN.

Из равенства $\Delta DEO = \Delta DOF$ следует: $OE=OF$, $ME=NF$, $\Delta DEO=\Delta DFO$.

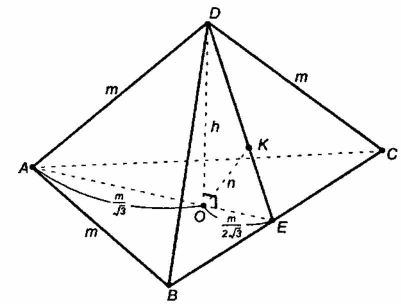
А, значит, $\Delta OEM=\Delta OFN$, и $OM=ON$.

286.

а) В ΔABC отрезок AO – радиус описанной окружности. По теореме синусов имеем:

$$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2AO,\ AO = \frac{m}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{m}{\sqrt{3}},$$

$$OE = AE - OA = m\sin 60^\circ - \frac{m}{\sqrt{3}} = = \frac{m\sqrt{3}}{2} - \frac{m}{\sqrt{3}} = \frac{m}{2\sqrt{3}}.$$



Из прямоугольного ΔADO по т. Пифагора имеем:

$AD^2 = DO^2 + OA^2$, или

$$m^2 = \left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)^2 + h^2,$$

$$h^2 = m^2 - \frac{m^2}{3} = m^2 \cdot \frac{2}{3},\ h = \sqrt{\frac{2}{3}}m.$$

$$m = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot h = \frac{h\sqrt{6}}{2}.$$

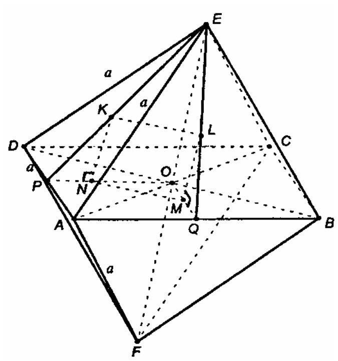
б) Т.к. $EO=EK$, то $OK \parallel AD$.

$\Delta EOK \sim \Delta EAD$. Из подобия следует:

$$\frac{OK}{AD} = \frac{OE}{EA},\ \frac{n}{m} = \frac{m}{2\sqrt{3}} : \frac{m\sqrt{3}}{2},\ \frac{n}{m} = \frac{1}{3},\ n = \frac{1}{3}m.$$

Ответ: а) $m = \frac{6\sqrt{6}}{2}$; б) $n = \frac{1}{3}m$.

287.



а) Расстояние между противоположными вершинами для всех вершин одинаково. Вычислим расстояние между вершинами D и B.

$$DB = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

б) Расстояние между центрами двух смежных граней одинаково для всех смежных граней.

В гранях DEA и AEB построим высоты EP и EQ. Пусть точки K и L – центры граней, KL – расстояние между центрами. В пл. POE построим $KN \perp PO$, а в пл. QOE – $LM \perp QO$. Построим отрезок NM, являющийся проекцией искомого отрезка KL на плоскость основания.

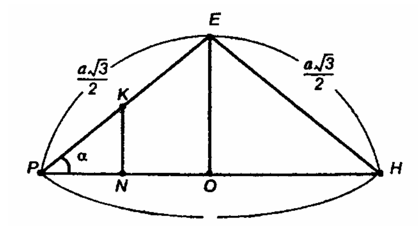
$KLMN$ – прямоугольник.

По теореме косинусов имеем:

$EH^2 = EP^2 + PH^2 - 2EP \cdot PH \cdot \cos\alpha$,

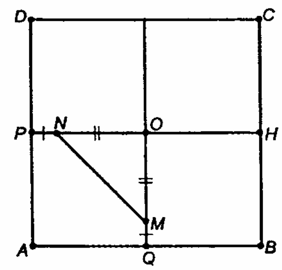
$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2 -$

$-2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \cos\alpha$,



$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

$PK = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ (радиус окружности, вписанной в правильный ΔDEA),



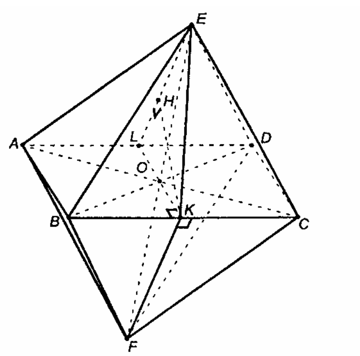
$PN = PK \cdot \cos\alpha = \frac{a}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{6}$,

$NO = OM = \frac{a}{2} - \frac{a}{6} = \frac{a}{3}$.

Из прямоугольного ΔNOM: $NM = ON \cdot \sqrt{2} = \frac{a}{3}\sqrt{2}$.

Т.е. искомое расстояние равно $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

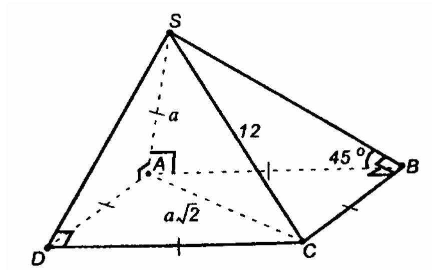
в)



Через середину квадрата $ABCD$ построим $LK \parallel AB$. В грани FBC построим FK, а в грани AED – EL, $FK \perp BC$, $EL \perp AD$ (высоты в равносторонних треугольниках).

$$\left.\begin{array}{l} FK \perp BC, \\ BC \parallel AD, \\ EL \perp AD, \end{array}\right\} \rightarrow EL \parallel FK, \text{ грани } AED \text{ и } FBC \text{ параллельны.}$$

Пл. $LEK \perp$ пл. FBC и пл. $LEK \perp$ пл. AED.
Из т. K построим в пл. LEK отрезок $KH \perp LE$.
$KH \perp AD$ (т.к. пл. $LEK \perp AD$) и
$KH \perp LE$, LE пересекается с AD.
Отсюда $KH \perp$ пл. AED (и $KH \perp$ пл. FBC).
Значит, KH – искомое расстояние.



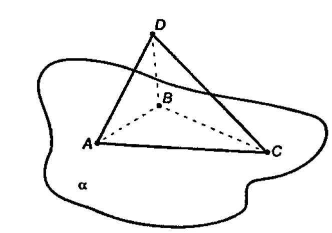
$\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$,

$HK = LK \cdot \sin\alpha = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: а) $a\sqrt{2}$; б) $\dfrac{a\sqrt{2}}{3}$; в) $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ III

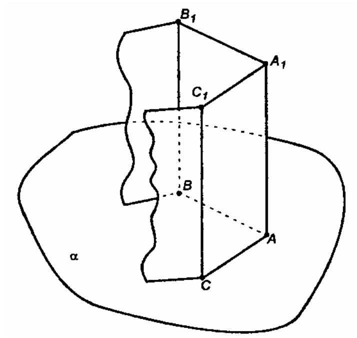
1. Три точки, не лежащие на одной прямой, задают единственную плоскость, проходящую через них. Точка, не лежащая в данной плоскости задает выход из плоскости в трехмерное пространство. Соединим ее отрезками с тремя точками на плоскости. Получим тетраэдр, у которого 6 ребер, а именно: 3 в основании и 3 боковых.



Ответ: 6 ребер.

2. Призма имеет столько граней, сколько сторон у многоугольника, лежащего в основании. Если призма имеет n граней, то в основании лежит выпуклый n-угольник.

3. Плоскость A_1ABB_1 образует с плоскостью α двугранный угол 90^o. Соответствующий ему линейный угол $\angle A_1AB=90^o$. Плоскость A_1ACC_1 образует с плоскостью α двугранный угол 90^o. Соответствующий ему линейный угол $\angle A_1AC=90^o$. Итак, $AA_1 \perp AC$, $AA_1 \perp AB$, то есть AA_1 перпендикулярен к двум пересекающимся прямым в пл. α; следовательно, $AA_1 \perp \alpha$. Боковые ребра призмы параллельны, следовательно, все они перпендикулярны пл. α. Следовательно, по определению, если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется прямой (п. 27).

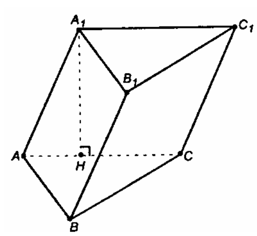


Ответ: да.

4. Высота призмы – это перпендикуляр, проведенный из некоторой точки одного основания к плоскости другого основания. Боковые ребра, параллельные высоте, тоже перпендикулярны основаниям, т.е. призма – прямая.
Ответ: в прямой призме.

5. Если все ребра призмы равны, то в основании лежит правильный многоугольник. Но равенство ребер не гарантирует их перпендикулярности к основаниям призмы, например, боковые грани – ромбы. Следовательно, равенства всех ребер призмы недостаточно для того, чтобы она была прямой.
Ответ: в общем случае – нет.

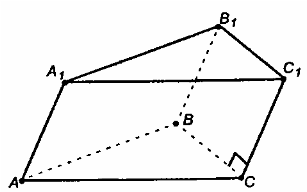
6. Может, если, например, в треугольной наклонной призме одна из граней перпендикуляра к плоскости основания.



пл. $AA_1C_1C \perp$ пл. ABC,
$A_1H \perp AC$, $A_1H \perp$ пл. ABC.
A_1H – высота боковой грани и призмы одновременно.

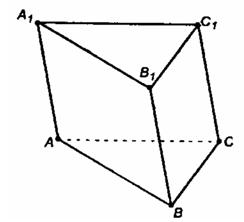
7.

а)



$C_1C \perp BC$, но C_1C не перпендикулярно CA и BA.

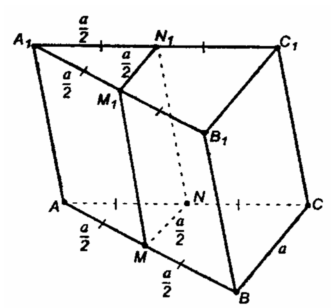
б)



Грань A_1AC_1C перпендикулярна пл. ABC; а две другие грани не перпендикулярны пл. ABC.

Ответ: а) да, существует; б) да существует.

8. Пусть ребро $AB=a$, а боковое ребро $A_1A=h$. В призме $AMNA_1M_1N_1$.



$$S_{бок} = 2 \cdot S_{AA_1M_1M} + S_{MM_1N_1N},$$

$$S_{бок} = 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot h + \frac{a}{2} \cdot h = ah + \frac{a}{2} h = \frac{3ah}{2}.$$

В призме $MBCNM_1B_1C_1N_1$:

$$S_{бок} = 2 \cdot S_{MBB_1M_1} + S_{MNN_1M_1} + S_{BCC_1B},$$

$$S_{бок} = 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot h + \frac{a}{2} \cdot h + ah =$$

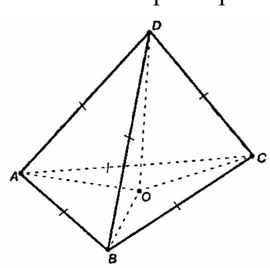
$$= 2ah + \frac{ah}{2} = \frac{5ah}{2}.$$

Отношение площадей:

$$S_{бок}AMNA_1M_1N_1 : S_{бок}MBCNM_1B_1C_1N_1 = \frac{3ah}{2} : \frac{5ah}{2} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Ответ: 0,6.

9. Рассмотрим простейший случай: пирамида – треугольная.



Пусть ΔADB – правильный, $AD=a$. Тогда по условию ΔBDC и ΔADC – тоже правильные треугольники со сторонами, равными a. Значит, $\Delta ADC = \Delta BDC = \Delta ADB$. Построим высоту пирамиды DO. $DO \perp$ пл. ABC. Построим отрезки OA, OB, OC.

$\Delta DOA = \Delta DOB = \Delta DOC$ (по катету DO и гипотенузам $DA = DB = DC$), тогда из равенства треугольников следует: $OA=OB=OC$, точка O – центр правильного ΔABC. По определению пирамида $DABC$ – правильная.

Когда пирамида имеет n граней и все они правильные треугольники, то все рассуждения аналогичны.

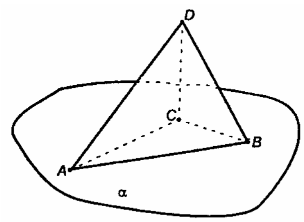
а) Все боковые грани равны.

б) Построим высоту пирамиды, основание высоты – точка O.

Соединяем т. O с вершинами n-угольника, лежащего в основании. Получили n прямоугольных треугольников, которые равны по катету и гипотенузе. Значит, равны и отрезки, соединяющие т. O с вершинами n-угольника. Следовательно, т. O равноудалена от вершин n-угольника, следовательно, является центром правильного n-угольника.

По определению данная пирамида – правильная.

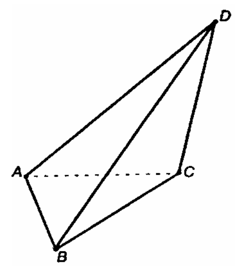
Ответ: будет.



10. а) Пусть в пирамиде $DABC$ грань $ADC\perp$пл. ACD. Отсюда следует:

а) Возможен случай, когда грань $DCB\perp$пл. ABC, ребро $DC\perp$пл. ABC.

б) Второйслучай: грань $ADC\perp$пл. ABC, другие грани – наклонные.



Из вершины пирамиды можно провести единственный перпендикуляр к плоскости основания. Пусть этот перпендикуляр – боковое ребро. Через него можно провести две боковые смежные грани, тоже перпендикулярные плоскости основания. Остальные грани будут образованы наклонными, проведенными из вершины пирамиды, и, поэтому, не могут быть перпендикулярны основанию.

Ответ: одну или две.

11. У пирамиды, описанной в вопросе, две противоположные грани параллельны, то есть не имеют общей точки. Но пирамида имеет общую точку для всех боковых граней – вершину пирамиды. Таким образом, пирамида при таком условии не существует.

Ответ: не существует.

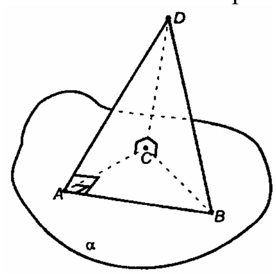
12. Построим пирамиду, у которой все грани – прямоугольные треугольники.

Из т. $C \in \alpha$ проводим CA и CB.

Из т. C восстановим перпендикуляр CD к пл. a.

Построим отрезок DA. Через т. A проводим $AB\perp CA$. Проводим отрезок DB.

ΔDCA и ΔDCB – прямоугольные (т.к. $DC \perp$пл. ABC).



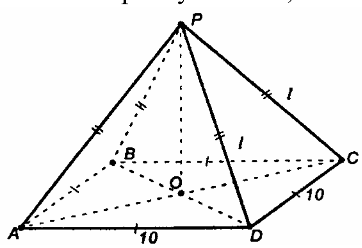
По теореме о 3-х перпендикулярах имеем $DA \perp AB$, значит, ΔDAB прямоугольный. А ΔCAB прямоугольный по построению.

Т.е. пирамида, у которой все грани есть прямоугольные треугольники, построена.

Ответ: могут.

13. Пусть боковое ребро равно l. Построим высоту PO.

ΔPDO прямоугольный, $PD > OD$, т.к. PD – гипотенуза,



или $l > \dfrac{10\sqrt{2}}{2}$, $l > 5\sqrt{2}$.

Соответственно, $41 > 20\sqrt{2}$.

На основание понадобится 10·4=40 (см) проволоки, значит, на боковые ребра останется 66 – –40=26 (см).

Сравним числа $20\sqrt{2}$ и 26.

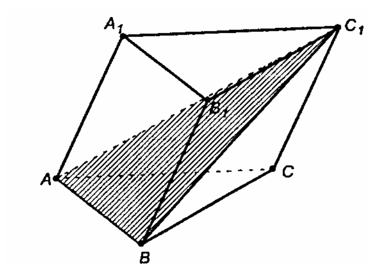
$20\sqrt{2} \vee 26$, $10\sqrt{2} \vee 13$, $100 \cdot 2 \vee 169$, $200 \vee 169$.

Раз 200 > 169, то и $20\sqrt{2} > 26$.

Т.е. $4l > 20\sqrt{2} > 26$. значит, на боковые ребра нужно затратить более 26 см проволоки, а их – нет.

Ответ: нельзя.

14.



На треугольные пирамиду $CABC_1$ и четырехугольную пирамиду $C_1ABB_1A_1$.

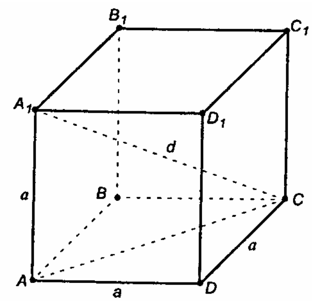
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ III

288.

Пусть в основаниях призмы будут n-угольники. Тогда вершин у призмы будет $n+n=2n$, а выражение $2n$ делится на 2 при любом n.

Число боковых ребер равно числу вершин многоугольника, лежащего в основании, то есть равно n. Число ребер верхнего основания равно числу сторон n-угольника, то есть равно 12. У нижнего основания также n сторон. Всего ребер $n+n+n=3n$, а выражение $3n$ делится на 3 при любом n.

289.



Куб имеет 6 равных граней, каждая из которых – квадрат. Значит, $S_{полн} = 6 \cdot S_{грани}$.

Пусть ребро куба равна a. Построим отрезки A_1C и AC; по условию, $A_1C=d$, $ABCD$ – квадрат, AC – его диагональ. По теореме Пифагора, из ΔACD имеем:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2; \quad AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2.$$

Из прямоугольного ΔAA_1C по теореме Пифагора имеем:

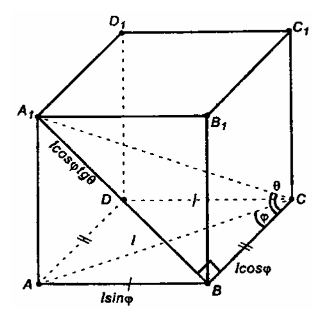
$$A_1C^2 = AC^2 + AA_1^2, \text{ или } d^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2.$$

Отсюда $a^2 = \frac{1}{3} \cdot d^2$.

Найдем площадь грани AA_1D_1.

$$S_{грани} = AA_1^2 = a^2 = \frac{d^2}{3},$$

тогда, $S_{полн} = 6a^2 = \frac{6 \cdot d^2}{3} = 2d^2$.



290. Из определения прямоугольного параллелепипеда следует, что в основании лежит прямоугольник ABCD.

В ΔACB: $\angle ABC = 90^\circ$,

$BC = l\cos\varphi, \quad AB = l\sin\varphi$.

$AA_1 \perp BC$ и $AB \perp BC$, отсюда $A_1B \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах имеем:

ΔBA_1C – прямоугольный, $\angle A_1BC = 90^\circ$, $A_1B = BC \cdot tg\theta = l\cos\varphi tg\theta$.

По теореме Пифагора из ΔAA_1B напишем:

$$AA_1 = \sqrt{A_1B^2 - AB^2} = \sqrt{l^2\cos^2\varphi tg^2\theta - l^2\sin^2\varphi} =$$

$$= l\cos\varphi\sqrt{tg^2\theta - tg^2\varphi};$$

$$\sqrt{l^2\cos^2\theta - \frac{\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}} = \sqrt{l^2\cos^2\theta(tg^2\theta - tg^2\varphi)} =$$

$$= |l\cos\varphi|\sqrt{tg^2\theta - tg^2\varphi} = l\cos\varphi\sqrt{tg^2\theta - tg^2\varphi},$$

т.к. φ– острый, то $\cos\varphi > 0$).

$$S_{бок} = 2S_{AA_1B_1B} + 2S_{BB_1C_1C} = 2AA_1\cdot AB + 2AA_1\cdot BC =$$

$$= 2l\cos\varphi\sqrt{tg^2\theta - tg^2\varphi}\cdot(l\sin + l\cos\varphi) =$$

$$= 2l^2\cos\varphi\sqrt{tg^2\theta - tg^2\varphi}(\sin\varphi + \cos\varphi)\ ;\ (1)$$

$$\sin\varphi + \cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(\sin\varphi + \cos\varphi) =$$

$$= \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi) =$$

$$= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\varphi + \sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\varphi = \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - \varphi).$$

$$tg^2\theta - tg^2\varphi = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} =$$

$$= \frac{\sin^2\theta\cdot\cos^2\varphi - \cos^2\theta\cdot\sin^2\varphi}{\cos^2\theta\cdot\cos^2\varphi} =$$

$$= \frac{(\sin\theta\cdot\cos\varphi + \cos\theta\cdot\sin\varphi)(\sin\theta\cdot\cos\varphi - \cos\theta\cdot\sin\varphi)}{\cos^2\theta\cdot\cos^2\varphi}.$$

Подставим в выражение (1) преобразованные выражения.

$$S_{бок} = \frac{2l^2\cos\varphi\sqrt{\sin(\theta+\varphi)\cdot\sin(\theta-\varphi)}\cdot\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)}{\sqrt{\cos^2\theta\cdot\cos^2\varphi}} =$$

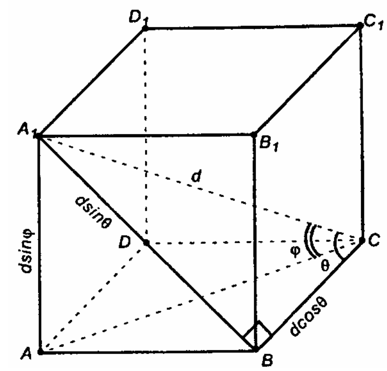
$$= \frac{2\sqrt{2}l^2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\cdot\sqrt{\sin(\theta+\varphi)\cdot\sin(\theta-\varphi)}\cdot\cos\varphi}{\cos\theta\cdot\cos\varphi} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}l^2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \cdot \sqrt{\sin(\theta + \varphi) \cdot \sin(\theta - \varphi)}}{\cos\theta}.$$

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{2}l^2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) \cdot \sqrt{\sin(\theta + \varphi) \cdot \sin(\theta - \varphi)}}{\cos\theta}.$

291.

Пусть A_1C – наклонная, AC – ее проекция на плоскость основания, тогда, $\angle A_1CA = \varphi$.



По теореме о 3-х перпендикулярах имеем $A_1B \perp BC$. ΔA_1BC прямоугольный ($\angle A_1BC = 90^\circ$).

$A_1B = d\sin\theta$, $BC = d\cos\theta$.

Из прямоугольного ΔA_1AC имеем:

$AC = d\cos\varphi$, $A_1A = d\sin\varphi$.

Из прямоугольника ΔABC по теореме Пифагора имеем:

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{d^2\cos^2\varphi - d^2\cos^2\theta} =$$

$$= d\sqrt{(\cos\varphi + \cos\theta)\cdot(\cos\varphi + \cos\theta)} =$$

$$= d\sqrt{\left(2\cdot\cos\frac{\varphi+\theta}{2}\cdot\cos\frac{\varphi+\theta}{2}\right)\cdot\left(2\cdot\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\cdot\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\right)} =$$

$$= d\sqrt{2\sin\frac{\varphi+\theta}{2}\cdot\cos\frac{\varphi+\theta}{2}\cdot 2\cdot\sin\frac{\varphi-\theta}{2}\cdot\cos\frac{\varphi-\theta}{2}} =$$

$$= d\sqrt{\sin(\varphi+\theta)\cdot\sin(\varphi-\theta)}.$$

$$S_{бок} = 2S_{AA_1B_1B} + 2S_{BB_1C_1C} = 2AA_1\cdot AB + 2AA_1\cdot BC =$$

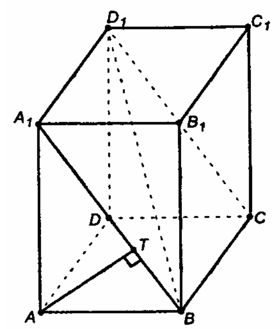
$$= 2AA_1(AB + BC) = 2d\sin\varphi(d\sqrt{\sin(\theta+\varphi)\sin(\theta-\varphi)} + d\cos\theta) =$$

$$= 2d^2\sin\varphi(\cos\theta + \sqrt{\sin(\theta+\varphi)\cdot\sin(\theta-\varphi)}).$$

Ответ: $2d^2\sin\varphi(\cos\theta + \sqrt{\sin(\theta+\varphi)\cdot\sin(\theta-\varphi)})$.

292.

Прямые AD и D_1B – скрещивающиеся. Построим через D_1B плоскость, параллельную AD. Расстояние от стороны основания AD до D_1B – расстояние от AD до плоскости, параллельной AD.



Т.к. $AD \parallel A_1D_1$, то $AD \parallel$ пл. A_1D_1CB.

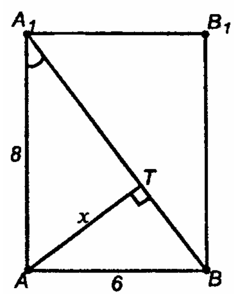
В пл. AA_1B_1B построим отрезок $AT \perp A_1B$.

$AT \perp AD$ т.к. принадлежит плоскости передней грани, перпендикулярной AD, а $AD \parallel BC$, значит, $AT \perp BC$. Получили, что $AT \perp BC$ и $AT \perp A_1B$, следовательно, $AT \perp$пл. A_1D_1CB.

AT – искомое расстояние.

По т. Пифагора из ΔAA_1B имеем:

$$A_1B^2 = AA_1^2 + AB^2;\ A_1B = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$



Из прямоугольного ΔAA_1B имеем: $tg\alpha = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Пусть $AT=x$, тогда из прямоугольного ΔA_1AT: $tg\alpha = \frac{x}{\sqrt{64 - x^2}}$

(т.к. $AT = \sqrt{AA_1^2 - A_1T^2}$), $\frac{3}{4} = \frac{x}{\sqrt{64 - x^2}}$, $\frac{x}{\sqrt{64 - x^2}} = \frac{9}{16}$,

$$16x^2 = -9x^2 + 9 \cdot 64,$$

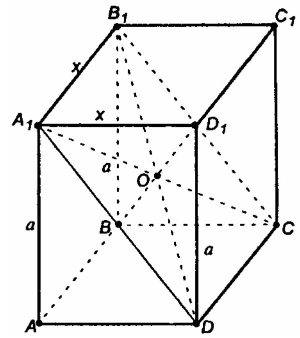
$$25x^2 = 9 \cdot 64 (x > 0),$$

$5x = 3 \cdot 8$, $x = \frac{25}{4} = 4{,}8$ (см), $AT = 4{,}8$ (см).

Ответ: 4,8 см.

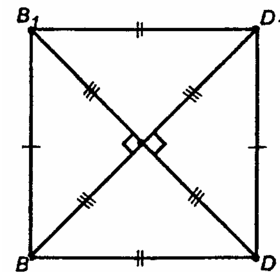
293.

Т.к. в основании 4-угольник, то данный многогранник – прямоугольный параллелепипед, $ABCD$ – квадрат. Диагонали прямоугольного параллелепипеда в точке пересечения – т. O делятся пополам. Диагонали B_1D и BD_1 лежат в плоскости B_1D_1DB, а B_1D_1DB – прямоугольник и по условию $B_1D \perp BD_1$.



По свойству диагоналей прямоугольника, $B_1D=BD_1$ и $B_1O=OD=BO=OD_1$.

Все 4 прямоугольных треугольника равны по двум катетам, значит, $B_1D=D_1D$, то есть B_1D_1DB – квадрат.



Пусть $B_1D_1=a$, а $B_1C_1=x$. Тогда из $\Delta A_1B_1D_1$ по теореме Пифагора имеем:

$$x^2+x^2=a^2,\ \ x^2=\frac{a^2}{2}.$$

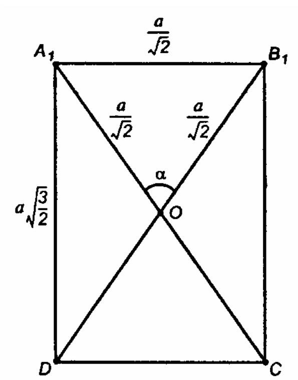
Диагонали A_1C и B_1D лежат в плоскости A_1B_1CD; A_1B_1CD – прямоугольник.

Из прямоугольного ΔAA_1D_1по теореме Пифагора имеем:

$$A_1D^2=A_1A^2+AD^2=$$

$$=a^2+x^2=a^2+\frac{a^2}{2}=\frac{3a^2}{2};\ \ A_1D=a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Из прямоугольного ΔDA_1B_1 по т. Пифагора имеем:



$$DB_1=\sqrt{DA_1^2+A_1B_1^2}=$$

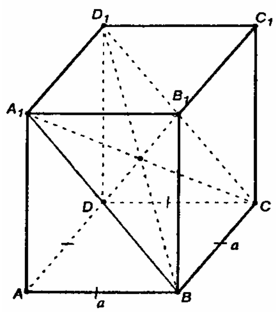
$$=\sqrt{\frac{3a^2}{2}+\frac{a^2}{2}}=a\sqrt{2},$$

$$A_1O=OC=OD=OB_1=\frac{a\sqrt{2}}{2}=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Значит, $\Delta\, A_1OB_1$ – равносторонний,

тогда $\angle A_1OB_1=\alpha=\frac{180^{\circ}}{3}=60^{\circ}.$

294.



Правильная 4-угольная призма – прямоугольный параллелепипед, диагонали которого пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

Сечение A_1D_1CB, – прямоугольник. По условию его площадь равна S_o.

$$S_o = a \cdot A_1B, \text{ тогда } A_1B = \frac{S_o}{a}.$$

Из прямоугольного ΔA_1AB по т. Пифагора имеем:

$$A_1A = \sqrt{A_1B^2 - AB^2} = \sqrt{\frac{S_o^2}{a^2} - a^2} = \frac{\sqrt{S_o^2 - a^4}}{a},$$

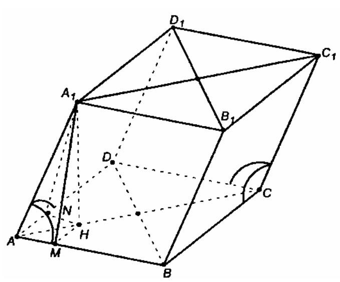
$$S_{бок} = 2 \cdot S_{AA_1B_1B} + 2 \cdot S_{BB_1C_1C} =$$

$$= 2AA_1 \cdot AB + 2 \cdot 2AA_1 \cdot AB = 4AA_1 \cdot a = \frac{4a\sqrt{S_o^2 - a^4}}{a} = 4\sqrt{S_o^2 - a^4}.$$

Ответ: $4\sqrt{S_o^2 - a^4}$.

295.

$CC_1 \parallel AA_1$, $ABCD$ – ромб. Отсюда $\angle A_1AD = \angle A_1AB$.



Построим $A_1H \perp$пл. ABC, $HM \perp AB$, $HN \perp AD$, отрезки A_1M и A_1N.

Нам надо доказать, что высота параллелепипеда A_1H проектируется в точке H на диагональ AC.

Т.к. по построению $A_1H \perp AB$ и $MN \perp AB$, то по теореме о 3-х перпендикулярах имеем: $A_1M \perp AB$.

Т.к. $A_1H \perp AD$ и $NH \perp AD$, то по теореме о 3-х перпендикулярах имеем: $A_1N \perp AD$.

$\Delta A_1AM = \Delta A_1AN$, ($A_1A$ – общая, они прямоугольные и имеют по равному острому углу). Отсюда следует, что $AM = AN$.

$\Delta AHM = \Delta AHN$, (т.к. они прямоугольные, гипотенуза AH – общая, $AN = AM$).

Отсюда следует, что $\angle HAM = \angle HAN$, то есть точка H лежит на биссектрисе угла ромба, которая является диагональю ромба; а диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Т.к. $A_1H \perp AC$ и $A_1A \perp DB$ (по теореме о 3-х перпендикулярах), но т.к. $A_1A \parallel C_1C$, то $C_1C \parallel DB$.

Утверждение а) доказано.

Докажем, что BB_1D_1D – прямоугольник.

Т.к. $D_1B_1 \parallel DB$ и $D_1D \parallel B_1B$, то DD_1B_1B – параллелограмм.

$B_1B \parallel A_1A$, но т.к. доказано, что $A_1A \perp DB$.

Значит, в параллелограмме $D_1D\ B_1B$ $\angle B_1BD=90\,^{\circ}$, и потому данный параллелограмм – прямоугольник.

Утверждение б) доказано.

Докажем, что $BD \perp$ пл. AA_1C_1.

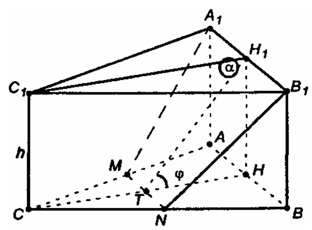
$DB \perp AC$ и $DB \perp AA_1$ – по свойству диагоналей ромба.

Отсюда $DB \perp$пл. A_1ACC_1, т.е. в) доказано. Докажем, что пл. $A_1ACC_1 \perp$пл. BB_1D_1D.

Т.к. пл. BB_1D_1D проходит через прямую $DB \perp AC$, то плоскости перпендикулярны.

Мы доказали и пункт г).

296.



Пусть ΔABC – правильный, $CC_1 \perp$пл. ABC, $CC_1=h$.

Построим линейный угол двугранного угла с ребром MN.

Построим $CH \perp AB$, $C_1H_1 \perp A_1B_1$, отрезки H_1H, TH_1.

$CH \perp MN$ (раз $MN \parallel AB$) и $HH_1 \perp AB$, ($A_1H_1=AH$, $A_1H_1 \parallel AH$, поэтому A_1H_1HA – параллелограмм с прямым углом A_1AH, A_1H_1HA – прямоугольник) то по теореме о 3-х перпендикулярах имеем: $T_1H_1 \perp MN$.

Тогда, $\angle H_1TH=\varphi$ – линейный угол двугранного данного угла.

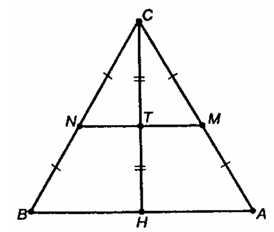
$H_1H=C_1C=h$.

4-угольник $ABNM$ – трапеция ($MN \parallel A_1B_1$).

Из ΔTHH_1 имеем: $H_1H{:}TH=tg\alpha$, или

$$\frac{h}{TH}=tg\varphi,\ \ TH=\frac{h}{tg\varphi}=hctg\varphi.$$

По теореме Фалеса имеем: CT=TH=$\frac{1}{2}$ CH, CH=2hctgφ.



$$CB = \frac{CH}{\sin 60^\circ} = \frac{2hctg\varphi}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4hctg\varphi}{\sqrt{3}}.$$

Значит, $A_1B_1 = \frac{4hctg\varphi}{\sqrt{3}}$, MN=$\frac{1}{2}$ AB=$\frac{2hctg\varphi}{\sqrt{3}}$.

Из прямоугольного ΔTH_1H имеем: $TH_1 = \frac{h}{\sin\varphi}$, тогда

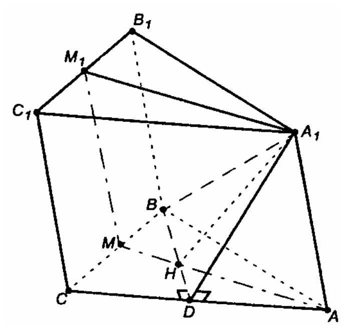
$$S = S_{MNB_1A_1} = \frac{(A_1B_1 + MN)\cdot TH_1}{2} =$$

$$= \frac{\frac{h}{\sin\varphi}\cdot\left(\frac{4hctg\varphi}{\sqrt{3}} + \frac{2hctg\varphi}{\sqrt{3}}\right)}{2} = \frac{6h^2ctg\varphi}{2\sqrt{3}\sin\varphi} = \frac{\sqrt{3}h^2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}h^2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$.

297.

а) ΔABC – правильный, $BD\perp AC$; $A_1H \perp AC$, тогда, пл. $A_1HD\perp AC$, значит, $A_1D\perp AC$.



Т.к. пл. AA_1C_1C проходит через прямую АС, перпендикулярную к плоскости A_1BD, то пл. $A_1BD \perp$пл. A_1AC.

б) В задаче буква O не оговорена – очевидно, опечатка, пункт б) можно не решать.

в) Построим $AM \perp CB$, $A_1M_1 \perp C_1B_1$ и отрезок MM_1.

Т.к. ΔABC – правильный, то АМ – продолжение АН.

$CM=C_1M_1$, $CM \parallel C_1M_1$, следовательно, C_1M_1MC – параллелограмм.

$MH \perp CB$ тогда по теореме о 3-х перпендикулярах имеем:

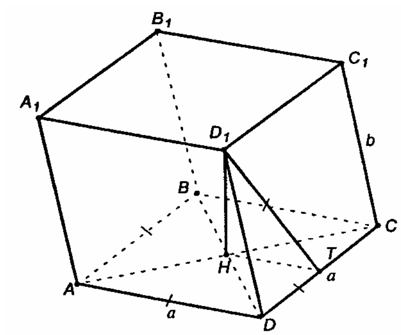
$A_1H \perp CB$ $AM \perp CB$, $CB \perp$пл. A_1HM.

Тогда, $CB \perp$пл. A_1HMM_1, следовательно, $CB \perp M_1M$.

Т.к. $CM \perp M_1M$, то параллелограмм CC_1M_1M – прямоугольник.

Т.к. $CC_1 \parallel M_1M \parallel B_1B$, $CB \perp M_1M$, то грань C_1B_1BC – прямоугольник.

298.



Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – данный параллелепипед, H – точка пересечения диагоналей AC и BD основания $ABCD$. Построим перпендикуляр, проведенный к плоскости основания через точку H. Вершина D_1 верхнего основания лежит на прямой $D_1H \perp$пл. $ABCD$.

$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$

$S_{осн} = S_{ABCD} = a^2$.

Т.к. в основании данного параллелепипеда – квадрат, то все 4 боковые грани равны. Найдем площадь одной из них, например, $S_{D_1C_1CD}$.

Построим $HT \perp DC$ и отрезок D_1T. По теореме о 3-х перпендикулярах имеем: $D_1T \perp DC$, тогда, D_1T – высота параллелограмма D_1C_1CD.

$S_{D_1C_1CD} = CD \cdot D_1T = a \cdot D_1T$.

Из ΔD_1HT по т. Пифагора имеем:

$$D_1T = \sqrt{HT^2 + D_1H^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + D_1H^2}.$$

$$BD = a \cdot \sqrt{2},\quad BH = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}},\quad D_1D = b.$$

По теореме Пифагора имеем: $D_1H = \sqrt{D_1D^2 - HD^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$.

Т.е. $D_1T = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2 - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{4b^2 - a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$,

$S_{D_1C_1CD} = a \cdot \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}$.

$S_{бок} = 4 \cdot \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2} = 2a\sqrt{4b^2 - a^2}$.

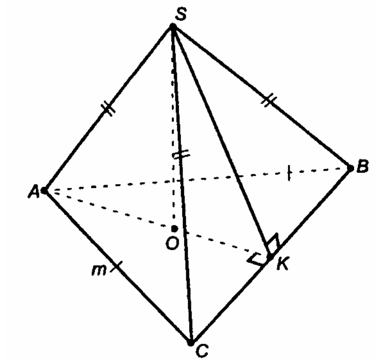
В итоге имеем:

$S_{полн} = a^2 + a^2 + 2a\sqrt{4b^2 - a^2} = 2a^2 + 2a\sqrt{4b^2 - a^2} = 2a(a + \sqrt{4b^2 - a^2})$.

Ответ: $2a(a + \sqrt{4b^2 - a^2})$.

299.

Пусть $ABCS$ – данная пирамида. Т.к. по условию $ABCS$ – правильная, то высота пирамиды $SO \perp$ пл. ABC, т. O – центр ΔABC.



Площадь правильного ΔABC равна $S_{осн} = \frac{m^2\sqrt{3}}{4}$. Соединим т. O с вершинами ΔABC, тогда получим три прямоугольных треугольника: ΔAOS, ΔBOS, ΔCOS. В них $OA=OB=OC$ (т.к. т. O – центр в правильном ΔABC), SO – общий катет. тогда, $\Delta AOS=\Delta BOS=\Delta COS$ (по двум катетам) и $SA=SB=SC$.

Т.е. все три боковые грани – равные треугольники. Найдем площадь S_{BCS}.

Построим $OK \perp BC$ и отрезок SK в грани BSC. По теореме о 3-х перпендикулярах имеем $SK \perp BC$, то есть SK – высота ΔSBC.

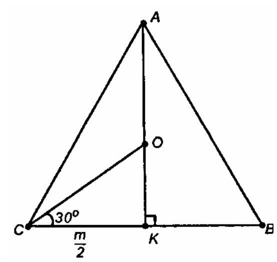
$$CK = BK = \frac{1}{2}BC = \frac{m}{2}.$$

Пусть $SO=h$. Тогда из прямоугольного ΔSOK по т. Пифагора имеем:

$$SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \sqrt{h^2 + OK^2},$$

$$S_{BCS} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot SK = \frac{m\sqrt{h^2 + OK^2}}{2},$$

$$S_{бок} = 3 \cdot S_{BCS} = \frac{3m\sqrt{H^2 + OK^2}}{2}.$$



По условию задачи $S_{бок} = 2S_{\Delta ABC}$, $\dfrac{3m\sqrt{h^2 + OK^2}}{2} = \dfrac{2m^2\sqrt{3}}{4}$, или $3\sqrt{h^2 + OK^2} = m\sqrt{3}$.

Найдем OK.

Т.к. ΔABC равносторонний, то OK – радиус вписанной окружности, $\angle OCK = 30^\circ$.

Из прямоугольного ΔOKC имеем:

$$\frac{OK}{CK} = tg30^\circ, \quad OK = \frac{m}{2}tg30^\circ = \frac{m}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{m}{2\sqrt{3}}, \quad OK^2 = \frac{m^2}{12}.$$

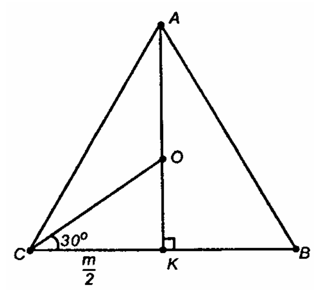
Из уравнения (1) найдем h.

$$\sqrt{3}\sqrt{h^2 + \frac{m^2}{12}} = m,$$

$3(h^2 + \dfrac{m^2}{12}) = m^2$, $3h^2 + \dfrac{m^2}{4} = m^2$, $3h^2 = \dfrac{3m^2}{4}$, $h^2 = \dfrac{m^2}{4}$; $h > 0$, поэтому $h = \dfrac{m}{2}$.

Ответ: $\dfrac{m}{2}$.

300.



Построим сечение плоскостью, проходящей через точки E, F и P.

Построим среднюю линию в ΔABC, $EF \parallel AC$, $EF=\frac{1}{2}AC=\frac{a}{2}$.

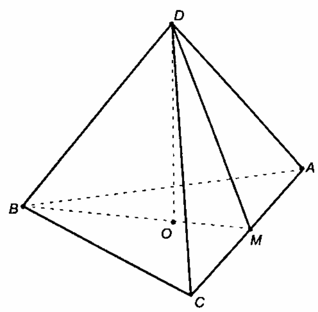
$EF \parallel AC$, а $AC \subset$ пл. DCA, значит, $EF \parallel$ пл. DCA. Плоскость сечения пересечет грань DCA по прямой PK.

Т.к. плоскость сечения проходит через прямую EF, параллельную плоскости DCA и пересекает плоскость DCA, то линия пересечения PK параллельна прямой EF.

Построим в грани BDA отрезок FP, а в грани BDC – отрезок EK.

4-угольник $EFOK$ и есть искомое сечение. $EF \parallel AC$, $PK \parallel EF \parallel AC$, $EF=\frac{1}{2}AC$, $PK=\frac{1}{2}AC$, значит, $FE=PK=\frac{a}{2}$. Т.к. $EF \parallel PK$ и $EF=PK$, то $EFPK$ – параллелограмм. Таким образом, $EK \parallel EP$, EK – средняя линия ΔBCD, $EK=\frac{b}{2}$ и $FP=\frac{b}{2}$.

Угол между скрещивающимися прямыми DB и CA равен 90°. Докажем это.



Построим высоту пирамиды DO. Точка O – центр правильного ΔABC. Продолжим отрезок BO до пересечения со стороной AC в точке M. В правильном ΔABC BM – высота, медиана и биссектриса, следовательно, $BM \perp CA$. Имеем, что $BM \perp CA$, $DO \perp CA$, тогда по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, $CA \perp$пл. BDM, тогда $CA \perp BD$.

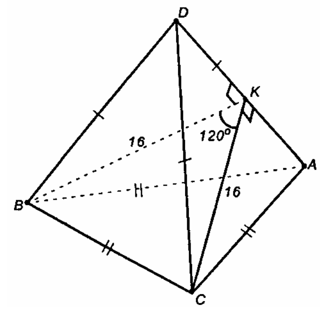
Значит, т.к. $CA \perp BD$, а $PK \parallel CA$ и $EK \parallel BD$, то $PK \perp EK$, и 4-угольник $EFPK$ есть прямоугольник.

$$S_{EFPK}=PK \cdot EK=\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}=\frac{ab}{4}.$$

Ответ: $\frac{ab}{4}$.

301.

Т.к. в правильной пирамиде боковые ребра равны, то $DB=DA=DC$. В основании – правильный ΔABC, т.е. $AB=AC=BC$.

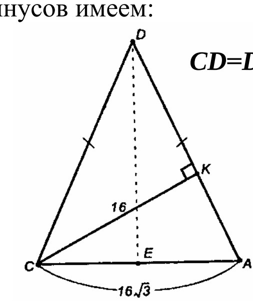


Следовательно, все боковые грани равны – равнобедренные треугольники.

Построим в пл. BDK отрезок $BK \perp DA$, $BK=16$ см. Т.к. $\Delta BDA=\Delta CDA$, то $CK \perp DA$.

$\angle CKB$ – линейный угол двугранного угла при боковом ребре, $\angle CKB=120^\circ$, тогда по условию $CK=BK=16$ см.

Из ΔBKC по т. косинусов имеем:



$$BC^2 = BK^2 + CK^2 - 2BK \cdot CK \cdot \cos 120^\circ;$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$BC^2 = 16^2 + 16^2 + 2 \cdot 16^2 \cdot \frac{1}{2} = 3 \cdot 16^2, \quad BC = 16\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Из прямоугольного ΔCKA имеем: $\sin \angle A = \dfrac{CK}{KA} = \dfrac{16}{16\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Из ΔCDA по теореме синусов имеем: $\dfrac{DA}{\sin \angle C} = \dfrac{CA}{\sin \angle D}$, откуда

$$\sin \angle D = \sin(180^\circ - 2\angle A) = \sin(2\angle A) = 2\sin \angle A \cdot \cos \angle A,$$

$$\cos\angle A = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

$$\sin\angle D = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$\dfrac{DA}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \dfrac{16\sqrt{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$, значит, $DA = \dfrac{16\sqrt{3}\cdot 1\cdot 3}{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{2}} = \dfrac{24}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}$ (см).

Построим $DE \perp AC$, DE – апофема пирамиды[1]. Тогда

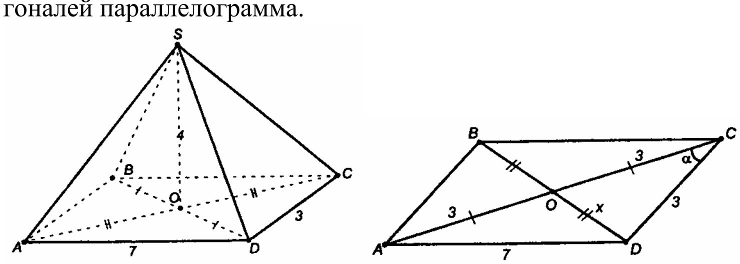
$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot DE\cdot CA$, тогда $16\cdot\sqrt{3}\cdot DE = 12\sqrt{2}\cdot 16$,

Отсюда $DE = \dfrac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{12\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{6}$ (см).

Ответ: $4\sqrt{6}$ см.

302.

Пусть $ABCDS$ – данная пирамида. Т. O – точка пересечения диагоналей параллелограмма.



По свойству параллелограмма имеем:

$BO=OD$ и $AO=OC$.

$SO \perp$ пл. ABC, $SO=4$.

$\Delta OSB = \Delta OSD$ (по двум катетам), тогда $SB=SD$;

$\Delta AOS = \Delta COS$ (по двум катетам), тогда $SA=SC$.

Пусть $AO=OC=\dfrac{1}{2}AC = 3$ см, $BO=OD=x$.

Из ΔACD по теореме косинусов имеем:

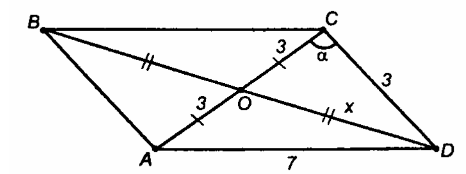
$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2\cdot AC\cdot CD\cdot\cos\alpha,$

[1] *Определение апофемы см. п. 29, стр. 67 учебника.*

$7^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \cos\alpha$, 49=36+9 $-36 \cdot \cos\alpha$, $36\cos\alpha = -4$;

$\cos\alpha = \dfrac{4}{-36} = -\dfrac{1}{9}$.

Т.к. $\cos\alpha < 0$, то задаче соответствует рисунок:



Из ΔCOD по теореме косинусов имеем:

$OD^2 = x^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos\alpha$,

$x^2 = 9 + 9 + 2 \cdot 9 \cdot \dfrac{1}{9} = 18 + 2 = 20$; $x = 2\sqrt{5}$ (см), (т.к. $x > 0$)

Из прямоугольного ΔSOD по теореме Пифагора имеем:

$SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{4^2 + 20} = \sqrt{36} = 6$ (см), $SD = SB = 6$ (см).

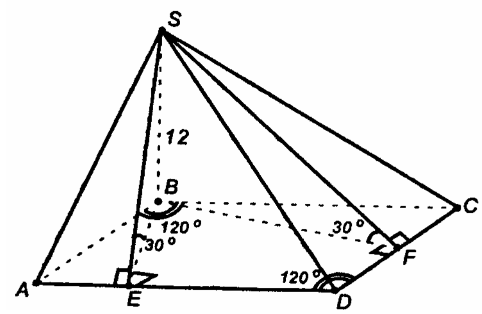
Из прямоугольного ΔSOC по т. Пифагора имеем:

$SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$ см. $SC = SA = 5$ см.

Ответ: 5 см, 5 см, 6 см, 6 см.

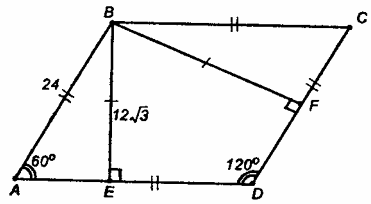
303.

Пусть $ABCDS$ – данная пирамида.



Построим $BE \perp AD$, $BF \perp CD$, отрезки SE и SF. По теореме о 3-х перпендикулярах имеем: $SE \perp AD$ и $SF \perp DC$. Таким образом, мы построили два угла: $\angle BES$ – линейный угол двугранного угла грани ASD и плоскости основания, а $\angle BFS$ – линейный угол двугранного угла грани DSC и плоскости основания.

$\Delta SBE = \Delta SBF$ (по катету и острому углу). Отсюда следует, что $BE = BF$.



Из прямоугольного ΔSBF имеем: $BF = SB \cdot ctg 30^\circ = 12\sqrt{3}$ (см).

Из прямоугольного ΔABE имеем: $AB = \dfrac{BE}{\sin 60^\circ} = \dfrac{12\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = 24$ (см).

Т.к. $ABCD$ – ромб, то AD=DC=24 см.

Из ΔSBE по т. Пифагора имеем: $SE = \sqrt{12^2 + 12^2 \cdot 3} = 24$ (см).

Находим тогда площади боковых граней.

$S_{ASB} = S_{CSB}$, т.к. ΔASB=ΔCSB. $S_{ASB} = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 24 = 144$ (см^2).

$S_{ASD} = S_{DSC}$, $S_{ASD} = \dfrac{1}{2} \cdot AD \cdot SE = \dfrac{1}{2} \cdot 24 \cdot 24 = 288$ см^2.

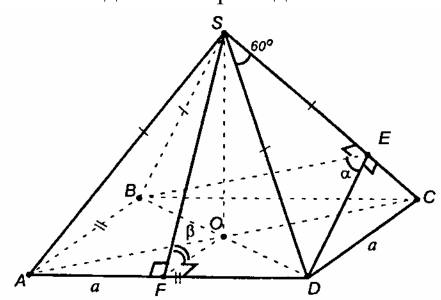
$S_{бок} = S_{ASB} + 2S_{ASD} = 2 \cdot 144 + 2 \cdot 288 = 3 \cdot 288$ (см^2).

$S_{осн} = AD \cdot BE = 24 \cdot 12\sqrt{3} = 288\sqrt{3}$ (см^2).

$S_{пов} = S_{бок} + S_{осн} = 3 \cdot 288 + 288\sqrt{3} = 288(3 + \sqrt{3})$ (см^2).

Ответ: $288(3 + \sqrt{3})$ см^2.

304. Пусть $ABCDS$ – данная пирамида.



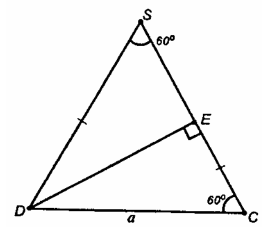
Т.к. $ABCDS$ – правильная пирамида, то основание $ABCD$ – квадрат, точка O – центр квадрата, SO – высота пирамиды, SA=SB=SC=SD.

Построим $DE \perp SC$; в силу равенства треугольников ΔBSC=ΔDSC по трем сторонам. $BE \perp SC$ и $\angle DEB$ – линейный угол двугранного угла. Пусть $\angle DEB = \alpha$.

Построим $OF \perp AD$ и отрезок SF. По теореме о 3-х перпендикулярах имеем $SF \perp AD$. $\angle OFC$ – линейный угол двугранного угла между боковой гранью и плоскостью основания.

Пусть $\angle OFC = \beta$.

Пусть сторона основания равна a. Тогда $BD = AC = a\sqrt{2}, \quad OF = \frac{a}{2}$.



ΔDSC – равнобедренный, а т.к. $\angle$DSC=60°, то ΔDSC – равносторонний. DE= $a\sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad DE = BE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Из ΔBED по теореме косинусов имеем: $BD^2 = BE^2 + DE^2 - -2 \cdot BE \cdot DE \cdot \cos\alpha$, или $2a^2 = 2 \cdot \frac{a^2 \cdot 3}{4} - \; 2 \cdot \frac{a^2 \cdot 3}{4}\cos\alpha$,

$1 = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\cos\alpha, \quad \cos\alpha = -\frac{1}{3}$; т.е. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Из ΔSOF: $\cos\beta = \frac{OF}{SF}$,

$SF = SD \cdot \sin\angle FDS = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $\cos\beta = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Свяжем углы α и β.

$\cos\alpha = -\frac{1}{3}; \quad \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$, причем $45^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$, следовательно, $\cos\frac{\alpha}{2} > 0$.

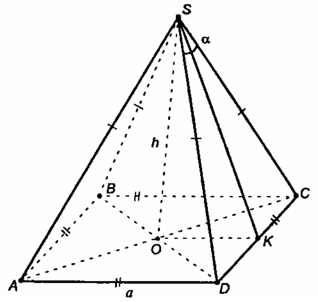
$2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = -\frac{1}{3,} \quad \cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Т.е. получили, что $\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\beta$, а т.к. $\frac{\alpha}{2}$ и β - острые углы, то $\frac{\alpha}{2} = \beta$, что и требовалось доказать.

305.

Пусть $ABCDS$ – данная пирамида, т.к. $ABCDS$ – правильная, то SO – высота пирамиды, все боковые ребра равны. Все боковые грани – равные треугольники (они равны по 3-м сторонам), тогда

$S_{бок} = 4 \cdot S_{DSC}$. Найдем S_{DSC}. Для этого построим $OK \perp DC$. По теореме о 3-х перпендикулярах имеем: $SK \perp DC$;



$$S_{DSC} = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot SK.$$

Пусть $DA = a$. $DK = KC = \frac{a}{2}$, т.к. SK – высота, а значит, и медиана в равнобедренном ΔDSC.

Из ΔDSC имеем:

$$\frac{DK}{SK} = tg\,\frac{\alpha}{2},$$

$$SK = DK \cdot ctg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} ctg\,\frac{\alpha}{2}, \quad OK = \frac{\alpha}{2}.$$

Из прямоугольного ΔSOK по т. Пифагора имеем: $SO^2 + OK^2 = SK^2$;

$$h^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} ctg^2\,\frac{\alpha}{2}, \quad a^2 = \frac{4h^2}{ctg^2\frac{\alpha}{2} - 1},$$

$$ctg^2\frac{\alpha}{2} - 1 = \frac{1}{tg^2\frac{\alpha}{2}} - 1 = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{tg^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$\frac{1}{tg^2\frac{\alpha}{2} - 1} = \frac{tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \cdot tg\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\alpha}{2}}{\left(1 - tg^2\frac{\alpha}{2}\right) \cdot 2} = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{tg\frac{\alpha}{2}}{2} = tg\alpha \cdot \frac{tg\frac{\alpha}{2}}{2}.$$

$$a^2 = \frac{4h^2 \cdot tg\alpha \cdot tg\frac{\alpha}{2}}{2} = 2h^2 \cdot tg\alpha \cdot tg\frac{\alpha}{2}.$$

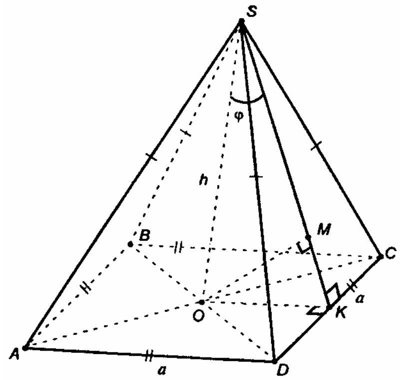
$$S_{DSC} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a}{2} \cdot ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1}{tg\frac{\alpha}{2}}; \quad S_{DSC} = \frac{2h^2 tg\alpha \cdot tg\frac{\alpha}{2}}{4 \cdot tg\frac{\alpha}{2}} = \frac{h^2 tg\alpha}{2},$$

$$S_{бок} = 4 \cdot S_{DSC} = \frac{4h^2 tg\alpha}{2} = 2h^2 tg\alpha.$$

Ответ: $2h^2 tg\alpha$.

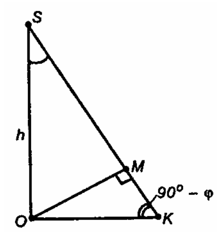
306.

Пусть $ABCDS$ – данная пирамида. SO – ее высота, все боковые ребра равны, все боковые грани – равные треугольники (по трем сторонам).



Построим $OK \perp CD$ и отрезок SK; $SK \perp CD$ (по теореме о 3-х перпендикулярах). Построим в плоскости SOK отрезок $OM \perp SK$. SM - проекция SO на DSC, значит $\angle OSM$ – угол между прямой SO и плоскостью DSC.

Из прямоугольного ΔSKO имеем:



$$SK = \frac{h}{\cos\varphi}, \quad OK = htg\varphi,$$

$$AD = CD = 2 \cdot OK = 2htg\varphi,$$

$$S_{DCS} = \frac{1}{2} DC \cdot SK = \frac{1}{2} \cdot 2htg\varphi \cdot \frac{h}{\cos\varphi} = \frac{h^2 tg\varphi}{\cos\varphi},$$

$$S_{бок} = 4 \cdot S_{DSC} = 4 \cdot \frac{h^2 tg\varphi}{\cos\varphi},$$

$$S_{осн} = S_{ABCD} = AD^2 = (2htg\varphi)^2 = 4h^2 tg^2 \varphi,$$

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} =$$

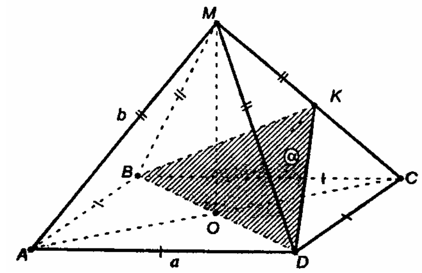
$$= \frac{4h^2 tg\varphi}{\cos\varphi} + 4h^2 tg^2 \varphi = 4h^2 tg\varphi \left[\frac{1}{\cos\varphi} + tg\varphi \right] =$$

$$= 4h^2 tg\varphi \left(\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi} \right) = 4h^2 tg\varphi \cdot \frac{1}{\cos\varphi} \cdot \sin\varphi (1 + \frac{1}{\sin\varphi}) = = 4h^2 tg^2 \varphi (1 + \frac{1}{\sin\varphi}).$$

Ответ: $4h^2 tg^2 \varphi (1 + \frac{1}{\sin\varphi})$.

307.

Пусть $ABCDM$ – данная правильная пирамида. Построим сечение пирамиды плоскостью α, параллельной MA и проходящей через BD. Для этого построим в пл. AMC отрезок: $OK \parallel AM$, отрезки DK и BK.



$AM \parallel OK$, $OK \subset BKD$, следовательно, $AM \parallel$ пл. BDK, пл. BDK – искомая пл. α. $AO=OC$, $OK \parallel AM$, т.е. OK – средняя линия ΔAMC, $OK = \frac{b}{2}$.

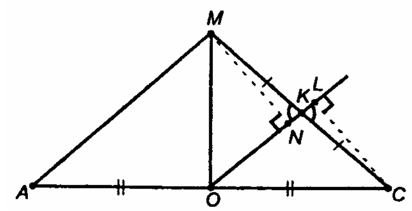
$ABCD$ – квадрат, следовательно, его диагональ $BD=a\sqrt{2}$.

$S_{BDK} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot OK$.

$AC \perp BD$, $MO \perp BD$ – значит, плоскость $AMC \perp BD$, тогда, $OK \perp BD$.

$S_{BDK} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{ab\sqrt{2}}{4}$.

б) OK – средняя линия ΔAMC, тогда $MK=KC$.



Построим $MN \perp OK$ и $CL \perp OK$, $BD \perp$пл. AMC, значит, $BD \perp MN$ и $BD \perp CL$, тогда $MN \perp$пл. BDK и $CL \perp$ пл. BDK, MN и CL – расстояния от точек M и C до пл. α.

$\Delta NMK=\Delta LCK$ (по гипотенузе и острому углу).

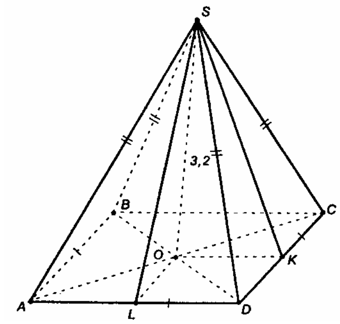
Отсюда следует: $MN=CL$, т.е. точки М и С равноудалены от пл. α.

Что и требовалось доказать.

Ответ: а) $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$.

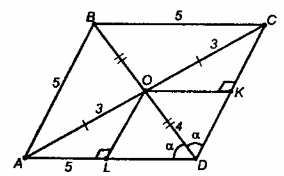
308.

Пусть $ABCDS$ – данная пирамида. O – точка пересечения диагоналей ромба ABCD. Построим $OK \perp DC$, $OL \perp AD$, отрезки KS и LS. По теореме о 3-х перпендикулярах имеем: $SK \perp DC$ и $SL \perp AD$.



BD – меньшая диагональ (т.к. она лежит против острого угла ромба).

$\Delta LOD = \Delta KOD$, следовательно, $OL = OK$. Значит, $\Delta SOL = \Delta SOK$ и $SK = SL$. Следовательно, высоты всех 4-х боковых граней равны.



Из ΔAOD по теореме Пифагора имеем:

$$OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{25 - 9} = 4 \text{ (см)},$$

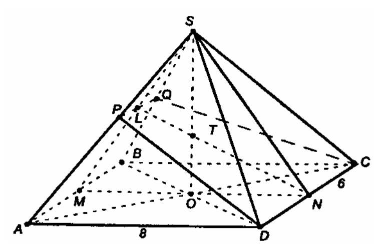
$$\cos\alpha = \frac{OD}{OA} = \frac{4}{5}, \text{ тогда } \sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}.$$

Из ΔODL: $OL = OD \cdot \sin\alpha = 2{,}4$ (см).

Из ΔSOK: $SK = \sqrt{SO^2 + OK^2} = \sqrt{3{,}2^2 + 2{,}4^2} = \sqrt{10{,}24 + 5{,}76} = \sqrt{16} = 4$ (см).

Ответ: 4 см, 4 см, 4 см, 4 см.

309.



Пусть $ABCDS$ – данная пирамида. В основании $ABCD$ – прямоугольник, AB=6 дм, AD=8 дм. Построим высоту SO, SO=6 дм.

Построим отрезки OA, OB, OC, OD.

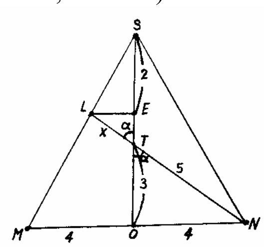
По условию, боковые ребра равны. Тогда их проекции на плоскость основания тоже равны, т.е. $OA = OB = OC = OD$, и точка O – точка пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$, т.к. по свойству прямоугольного треугольника диагонали равны и в точке пересечения делятся пополам.

Построим искомое сечение.

Через точку O построим $MN \parallel AD$ и отрезки SM и SN. В плоскости MSN построим отрезок, соединяющий точки N и T, где T – середина высоты SO – и продолжим этот отрезок до пересечения с отрезком SM в точке L.

$DC \parallel AB$, значит $DC \parallel$ пл. ASB. Линия пересечения секущей плоскости с плоскостью ASB будет параллельна DC, то есть $PQ \parallel DC$. Точки P и D, Q и C лежат в плоскостях соответствующих граней, их соединяем отрезками PD и QC. Сечение $DPQC$ – искомое. Т.к. $PQ \parallel DC$, то 4-угольник $DPQC$ – трапеция.

$S_{сеч} = \dfrac{PQ + DC}{2} \cdot LN$, т.к. LN – высота трапеции (пл. $MSN \perp DC$, а LN лежит в пл. MSN, значит, $LN \perp DC$).



Из ΔSON по т. Пифагора имеем:

$SN = \sqrt{SO^2 + ON^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$ (дм).

Построим $LE \perp SO$. Пусть $LT = x$.

Из ΔTON: $\cos\alpha = \dfrac{OT}{TN} = \dfrac{3}{5}$, тогда $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$.

Из ΔLET: $LE = x\sin\alpha = \dfrac{4x}{5}$, $ET = x\cos\alpha = \dfrac{3x}{5}$.

$\Delta MOS \sim \Delta LES$, значит, из подобия следует:

$\dfrac{SO}{MO} = \dfrac{SE}{LE}$, $\dfrac{6}{4} = \dfrac{3 - \frac{3x}{5}}{\frac{4x}{5}}$, тогда

$\dfrac{3 - \frac{3x}{5}}{\frac{4x}{5}} = \dfrac{3}{2}$, $6 - \dfrac{6x}{5} = \dfrac{12x}{5}$, $6 = \dfrac{18x}{5}$, $x = \dfrac{5}{3}$ (дм);

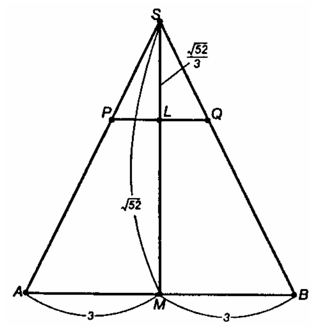
Отсюда получим:

$LN = \frac{5}{3} + 5 = \frac{20}{3}$ (дм),

$ES = 3 - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = 3 - 1 = 2$ (дм);

$LE = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$ (дм),

$LS = \sqrt{SE^2 + LE^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + 4} = \frac{\sqrt{52}}{3}$ (дм).



Из ΔMSO: $SM = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52}$ (дм),

Из подобия $\Delta AMS \sim \Delta PLS$ следует, что $\frac{AM}{SM} = \frac{PL}{SL}$, $\frac{3}{\sqrt{52}} = \frac{PL}{\sqrt{52}/3}$,

$\frac{3}{\sqrt{52}} = \frac{3 \cdot PL}{\sqrt{52}}$,

PL=1 (дм);

PQ=2·PL=2 (дм);

$S_{сеч} = \frac{2+6}{2} \cdot \frac{20}{3} = \frac{8 \cdot 20}{2 \cdot 3} = \frac{80}{3}$ (дм^2).

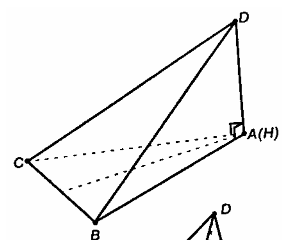
Ответ: $\frac{80}{3}$ дм^2.

310.

Т.к. существует единственный перпендикуляр из данной точки и данной плоскости,

$S_{бок} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ADC} + S_{\Delta BDC}$,

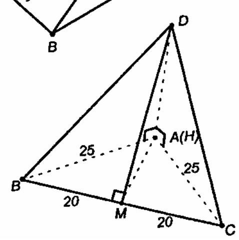
$S_{бок} = S_{\Delta ACD} = \frac{DH \cdot AC}{2} = \frac{8 \cdot 25}{2} = 100$ (см^2).



Из ΔABD по т. Пифагора имеем:

$BD = \sqrt{AB^2 + DA^2} =$

$= \sqrt{25^2 + 8^2} = \sqrt{689}$ (см).



Из ΔBDM по т. Пифагора имеем: $DM^2 = BD^2 - BM^2 = 689 - 400 = 289$;

DM=17;

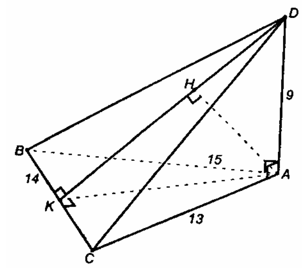
$S_{\Delta BDC} = (DM \cdot BM) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 17 \cdot 20 = 340$(см^2),

$S_{бок} = 100 + 100 + 340 = 540$ (см^2).

Ответ: 540 см^2.

311.

ΔDAB и ΔDAC – прямоугольные.



$$S_{BDA} = \frac{1}{2} DA \cdot BA = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 15 \text{ (см}^2\text{)},\ S_{CDA} = \frac{1}{2} DA \cdot CA = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 13 \text{ (см}^2\text{)}.$$

По формуле Герона имеем:

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $a = 14$, $b = 15$, $c = 13$,

а $p = \dfrac{AB + AC + BC}{2} = \dfrac{13+14+15}{2} = 21$ (см);

$$S_{ABC} = \sqrt{21 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8} = \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8} = \sqrt{3^2 \cdot 7^2 \cdot 4^2} = 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Построим $AK \perp BC$ и отрезок DK. По теореме о 3-х перпендикулярах имеем: $DK \perp BC$. Проведем в плоскости ADK отрезок $AH \perp DK$.

$AH \perp DK$ – по построению, и $AH \perp BC$, т.к. $AH \subset$ пл. ADK, то пл. $ADK \perp BC$.

AH перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости BCD, а, значит, $AH \perp$пл. BCD.

Итак, точка $H \subset DK$, а DK – высота грани DBC.

$$S_{DBC} = \frac{1}{2} BC \cdot DK.$$

Из ΔDKA по т. Пифагора имеем: $DK = \sqrt{DA^2 + AK^2} = \sqrt{81 + AK^2}$.

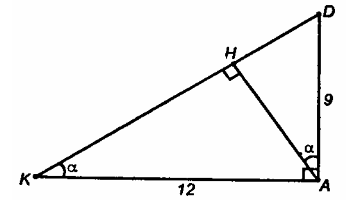
$S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AK \cdot BC = \dfrac{1}{2} AK \cdot 14$, следовательно,

$\dfrac{1}{2} AK \cdot 14 = 84,\ \ AK = 12$ (см), тогда

$DK = \sqrt{81 + 44} = \sqrt{255} = 15$ (см),

$$S_{DBC} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 15 = 7 \cdot 15 = 105 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Итак, $S_{пов} = \dfrac{9 \cdot 15}{2} + \dfrac{9 \cdot 13}{2} + 84 + 105 = \dfrac{9 \cdot 18}{2} + 189 = 315$ (см^2).



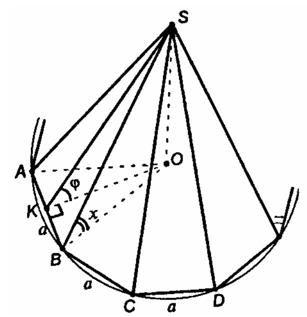
$KD=\sqrt{AK^2+DA^2}=\sqrt{144+81}==\sqrt{225}=15$ (см),

$\sin\alpha=\dfrac{DA}{KD}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}.$

Из ΔKHA: $AH=KA\cdot\sin\alpha=12\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{36}{5}=7\dfrac{1}{5}=7{,}2$ (см).

Ответ: а) 315 см^2; б) 7,2 см.

312.

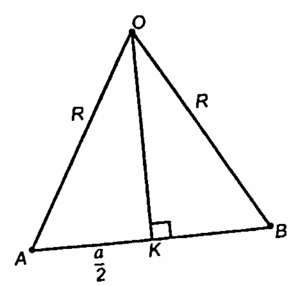


Т.к. в основании пирамиды лежит правильный n-угольник, и вокруг правильного n-угольника можно описать окружность, то $OA=OB=OC=\ldots=R$.

Пусть сторона правильного n-угольника равна a, значит, $R=\dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$.

Проведем $OK\perp AB$ и отрезок SK. $SK\perp AB$ по теореме о 3-х перпендикулярах, $\angle SKO$ – линейный угол двугранного угла между боковой гранью и плоскостью основания,

$$OK=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{a^2}{4\sin^2\dfrac{180^\circ}{n}}}=$$



$$=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{\cos^2\dfrac{180^\circ}{n}}{\sin^2\dfrac{180^\circ}{n}}}=\frac{a}{2}\left|ctg\frac{180^\circ}{n}\right|=\frac{a}{2}ctg\frac{180^\circ}{n}.$$

Из прямоугольного ΔSOK

$tg\varphi=\dfrac{SO}{OK}$, $SO=tg\varphi\cdot\dfrac{a}{2}ctg\dfrac{180^\circ}{n}$.

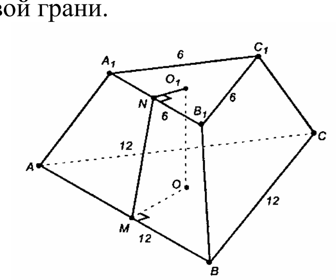
Пусть искомый угол SBO равен x (другие углы будут равны ему).

$$tgx = \frac{SO}{OB} = \frac{tg\varphi \frac{a}{2} \cdot ctg\frac{180^\circ}{n}}{\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}} = \frac{tg\varphi \cdot \cos\frac{180^\circ}{n}}{\sin\frac{180^\circ}{n} \cdot \frac{1}{\sin\frac{180^\circ}{n}}} = tg\varphi \cos\frac{180^\circ}{n}.$$

Ответ: $tg\varphi \cos\frac{180^\circ}{n}$.

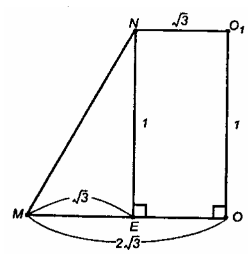
313.

Построим апофему MN, для чего проведем $OM \perp AB$, $O_1N \perp A_1B_1$; MN – высота боковой грани.



Т.к. в основаниях пирамиды лежат правильные треугольники, в них O_1N и OM являются радиусами вписанных окружностей, тогда

$$r = \frac{S}{p}, \quad S_{A_1B_1C_1} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ (дм}^2\text{)},$$



$$O_1N = \frac{9\sqrt{3}}{9} = \sqrt{3} \text{(дм}^2\text{)},$$

$$S_{ABC} = \frac{12^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3} \text{ (дм}^2\text{)},$$

$$OM = \frac{36\sqrt{3}}{18} = 2\sqrt{3} \text{ (дм)}.$$

$NE = O_1O = 1$ дм;

$ME = MO - NO_1 = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$ (дм).

Из прямоугольного ΔMNE по т. Пифагора:

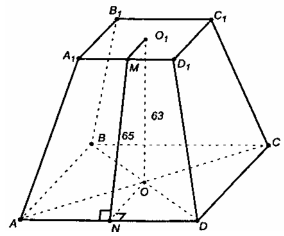
$MN = \sqrt{NE^2 + ME^2} = \sqrt{1+3} = 2$ (дм), тогда

$$S_{бок} = \frac{6\cdot 3 + 12\cdot 3}{2} \cdot 2 = 18 + 36 = 54 \text{ (дм}^2\text{)}.$$

Ответ: 54 дм^2.

314.

Проведем $ON \perp AD$, $O_1M \perp A_1D_1$ и отрезок MN. Плоскость $MNOO_1 \perp AD$, MN – апофема пирамиды, MN=65 см.



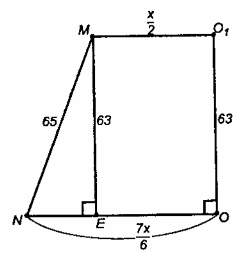
O_1O – высота пирамиды, O_1O=63 см.

$\frac{AD}{A_1D_1} = \frac{7}{3}$.

Пусть $A_1D_1 = x$, тогда $AD = \frac{7x}{3}$ см.

$ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – квадраты, $ON = \frac{1}{2}DC = \frac{7x}{6}$ (см),

$O_1M = \frac{1}{2}D_1C_1 = \frac{x}{2}$ (см).



Построим $ME \perp NO$.

$NE = \frac{7x}{6} - \frac{x}{2} = \frac{7x - 3x}{6} = \frac{2}{3}x.$

Из прямоугольного ΔMEN по т. Пифагора: $NE^2 = MN^2 - ME^2$;

$\frac{4}{9}x^2 = 65^2 - 63^2$, $\frac{4}{9}x^2 = 4225 - 3969 = 256$, $x^2 = \frac{9 \cdot 256}{4}$;

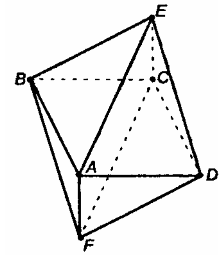
$x > 0$, следовательно, $x = \frac{3}{2} \cdot 16 = 24$ (см).

Значит, сторона верхнего основания равна 24 см, тогда сторона нижнего основания будет $\frac{7 \cdot 24}{3} = 56$ (см).

Ответ: 24 см, 56 см.

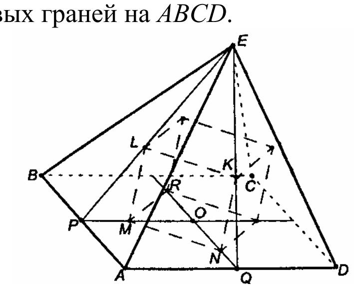
315. Правильный октаэдр состоит из 8 равносторонних треугольников.

ABCD – одна из плоскостей симметрии. Выполним построение для верхней половины октаэдра, тогда построение для нижней части есть зеркальное отображение построения в верхней части. Совместим половины октаэдра и получим полное построение.



ABCD – квадрат, все боковые грани равные между собой равносторонние треугольники. Возьмем грани: ΔABE и ΔADE. Центром равностороннего треугольника является точка пересечения медиан, высот и биссектрис.

Пусть L и K – такие точки для граней ΔABE и ΔADE (соответственно). Построим проекции L и K на *ABCD*. Пусть это будут точки M и N (соответственно). Аналогично простроим проекции двух других центров боковых граней на *ABCD*.

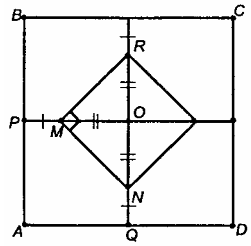


Итак, мы построили многогранник. Докажем, что он – прямоугольный параллелепипед.

Центры противоположных боковых граней лежат в плоскостях, проходящих через середины противоположных сторон квадрата *ABCD* и вершину E. Эти плоскости взаимно перпендикулярны. Т.о. четырехугольники, являющиеся основаниями полученного многогранника, имеют взаимно перпендикулярные диагонали, т.е. они или ромбы, или квадраты.

Т.к. грани *ABE* и *AQE* одинаково наклонены к плоскости основания, то $\angle MPE = \angle NQE$.

$\Delta PLN = \Delta QKN$ (прямоугольные, равны по 2-му признаку).

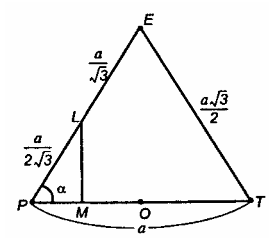


Из равенства треугольников имеем: $PM = NQ$.

$OM = ON$. Все четыре прямоугольных треугольника равны, следовательно, $\angle RMN$ – прямой. Отсюда имеем, что основания – квадраты.

Боковые грани многогранника также прямоугольники ($LM \perp MN$, $LK \parallel MN$).

Докажем теперь, что полученный многогранник – половина куба, т.е. $LM = \frac{1}{2} MN$.



Пусть сторона основания пирамиды – a.

Построим сечение верхней половины октаэдра плоскостью, проходящей через вершину E и середины противоположных сторон квадрата.

Из ΔBPE: $PE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $LE = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $LP = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

По т. косинусов из ΔPET имеем:

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2 - 2\frac{a\sqrt{3}}{2} a \cos\alpha .$$

Отсюда $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, тогда

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} .$$

Из ΔPLM: $LM = \frac{a}{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}. = \frac{a\sqrt{2}}{6}$,

$PM = \frac{a}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a}{6}.$

$OM = \frac{a}{2} - \frac{a}{6} = \frac{a}{3}.$

Из ΔMON: $MN = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$

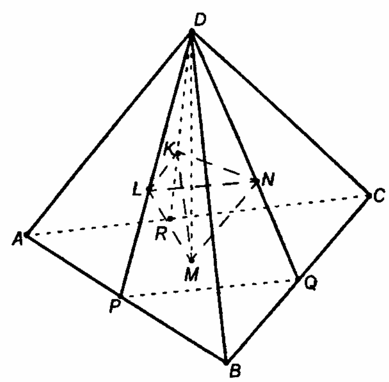
Получим: $LM = \frac{1}{2} MN.$

Совместим зеркальное построение для нижней половины и получим куб с ребром $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Вывод: центры граней правильного октаэдра есть вершины куба.

316.

DM – высота тетраэдра *ABCD; L, M, N, K* – центры граней тетраэдра *ABCD*. $MP=MQ$, $NQ=LP$, $\angle DPM=\angle DQM$. Значит, $\Delta PML=\Delta QMN$, откуда $LM=MN$.



$\Delta RMK=\Delta PML$, значит, $ML=MK$.

Итак, $LM=MN=MK$.

$\Delta PDQ=\Delta PDR=\Delta RDQ$ (по 3-му признаку). Т.к. $LP=NQ=KR$, то $DL=DK=DN$, и, значит, $\Delta DLN=\Delta DLK=\Delta DNK$, следовательно, и $LN=NK=LK$.

Пусть ребро тетраэдра *DABC* равно *a*. $NQ=MQ$, $DQ=AQ$ и, значит, $MN \parallel AD$.

$\Delta AQD \sim \Delta MQN$;

$$\frac{MN}{AD}=\frac{MQ}{AQ},\quad AD=a,\quad AQ=\frac{a\sqrt{3}}{2},\quad MQ=\frac{a}{2\sqrt{3}},\quad MN=a\cdot\frac{\frac{a}{2\sqrt{3}}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{a}{3}.$$

Далее, $LP=NQ$, $DP=DQ$, тогда $DL=DN$ и $LN=PQ$.

$\Delta PDQ \sim \Delta LDN$;

$$\frac{LN}{PQ}=\frac{DL}{DP},$$

PQ – средняя линия ΔABC, PQ||AC, $PQ=\frac{a}{2}$; $DL=\frac{a}{\sqrt{3}}$, $DP=\frac{a\sqrt{3}}{2}$,

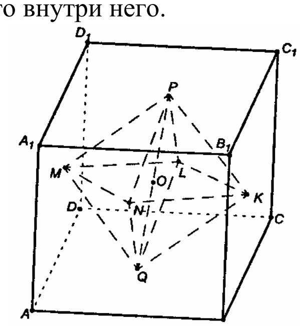
$$LN=\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{3}}:\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{a}{3}.$$

Итак, $MN=MK=LM=\frac{a}{3}$ и $LN=LK=KN=\frac{a}{3}$.

Тогда, $MN=MK=LM=LN=LK=KN$, то есть тетраэдр $MLKN$ составлен из равносторонних треугольников, значит, он – правильный тетраэдр.

317.

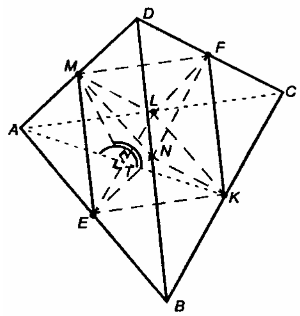
Т.к. плоскость $MNKL$ является плоскостью симметрии куба, то достаточно привести доказательство для верхней части многогранника, расположенного внутри него.



Построим ось симметрии PQ, и произведем поворот тетраэдра $PMNLK$ вокруг PO. Тогда на место ΔNPK перейдет ΔMPN, а $\Delta NPK = =\Delta MPN$, ΔMPN встанет вместо ΔKPL, который тоже равен ему, и так далее. Т.к. $AMPN = AMPK = AKPL = ALPM$, то $MP = KP = LP = NP$ и $MN = MK = KL = LM$. $PM = MN$, т.к. это расстояние между смежными гранями куба. Т.е. для верхней половины многогранника получим, что он составлен из 4-х равных равносторонних треугольников, в силу симметрии имеет место аналогичное утверждение и для нижней части, следовательно, многогранник составлен из 8 равных равносторонних треугольников, т.е. является октаэдром по определению.

318.

Правильный тетраэдр $DABC$ является опорной фигурой для построения правильного октаэдра. Для этого необходимо от каждой вершины правильного тетраэдра с ребром $2a$ отделить правильный тетраэдр с ребром, равным a.

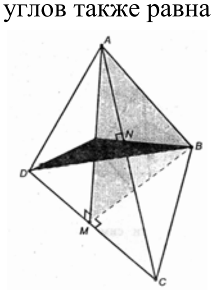


Т.к. все ребра образовавшегося внутреннего многогранника являются средними линиями соответствующих граней – правильного тетраэдра, то все ребра равны a, а грани многогранника являются правильными треугольниками со стороной a. Полученный 8-гранник является октаэдром по определению.

Построим AK в пл. ABC и MT в пл. EML; T – точка пересечения AK и EL. Т.к. пл. EML || пл. BDC, то двугранный угол, образованный пл. BDC с плоскостью основания, равен двугранному углу, образованному пл. EML с пл. ABC.

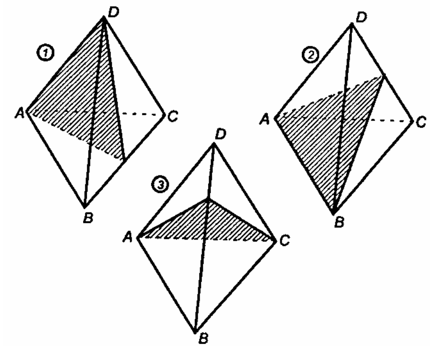
Далее имеем: $AK \perp EL$. MT – высота в равнобедренном ΔEML, следовательно, $MT \perp EL$. Значит, $\angle ATM$ – линейный угол двугранного угла тетраэдра. $\angle MTK$ – линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями EML и KEL октаэдра.

Т.к. $\angle ATM + \angle MTK = 180^\circ$, то сумма соответствующих двугранных углов также равна 180°.

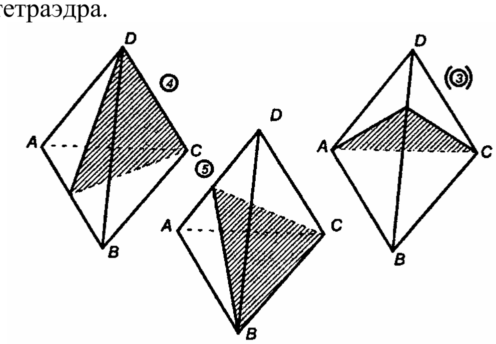


319.

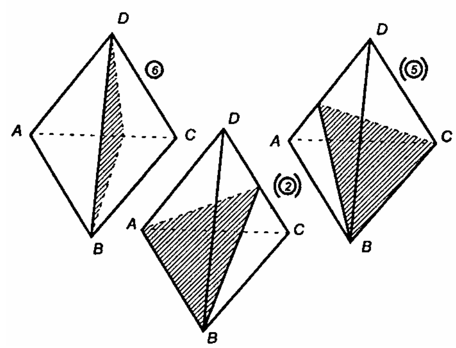
Плоскость, проходящая через ребро AB, а перпендикулярная ребру DC является плоскостью симметрии. Как следует из чертежа, через вершину B можно провести только две плоскости симметрии, не совпадающие с плоскостями симметрии, которые проведены через другие вершины тетраэдра. Всего через одну вершину можно провести три плоскости симметрии. Это можно доказать перебором всех вариантов.



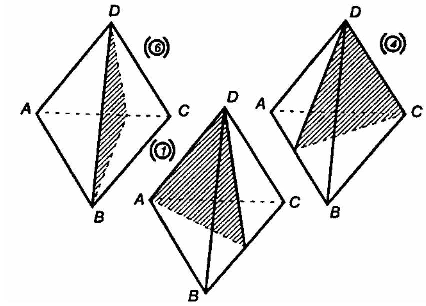
Изображены плоскости симметрии, которые проходят через вершину A тетраэдра.



Изображены плоскости симметрии, которые проходят через вершину C тетраэдра.



Изображены плоскости симметрии, которые проходят через вершину B тетраэдра.



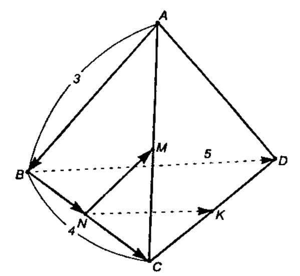
Изображены плоскости симметрии, которые проходят через вершину D тетраэдра.

Всего имеем 6 несовпадающих плоскостей симметрии тетраэдра.

ГЛАВА IV ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

320.

Т.к. $ABCD$ – тетраэдр, то имеем: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB}| = 3$ (см),



$|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CB}| = 4$ (см), $|\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{DB}| = 5$ (см),

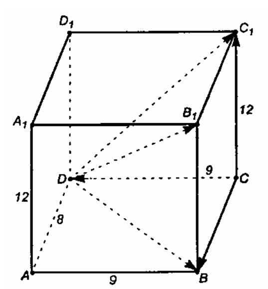
$|\overrightarrow{NM}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| = 1{,}5$ (см) (т.к. MN – средняя линия ΔABC), аналогично

$|\overrightarrow{BN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}| = 2$ (см),

$|\overrightarrow{NK}| = |\overrightarrow{NK}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BD}| = 2{,}5$ (см),

$|\overrightarrow{NC}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}| = 2$ (см).

Ответ: а) 3 см, 4 см, 5 см, 1,5 см, 2 см, 2,5 см; б) 4 см, 3 см, 5 см, 2 см, 2,5 см.



321.

По свойству параллелепипеда $|\overrightarrow{CC_1}| = 12$ см,

$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}| = 8$ см, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = 9$ см,

по т. Пифагора:

$|\overrightarrow{DC_1}| = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = 15$ (см),

$\left|\overrightarrow{DB}\right| = \sqrt{8^2+9^2} = \sqrt{64+81} = \sqrt{145}$ (см), $\left|\overrightarrow{DB_1}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{DB}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BB_1}\right|^2} =$

$= \sqrt{145+144} = \sqrt{289} = 17$ (см).

Ответ: а) 12 см, 8 см, 9 см; б) 15 см, $\sqrt{145}$ см, 17 см.

322. По свойству параллелепипеда имеем:

а) $\overrightarrow{C_1B_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{D_1A_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DK} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CM}$;

б) $\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{D_1A_1}$; $\overrightarrow{AD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{C_1B_1}$; $\overrightarrow{CC_1} \uparrow\downarrow \overrightarrow{A_1A}$; $\overrightarrow{CD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$;

в) $\overrightarrow{C_1B_1} = \overrightarrow{D_1A_1} = \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{DK}$.

323. а) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{QM}$, $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PC}$.

б) Т.к. NP и MQ – средние линии в ΔADC и ΔABC, то $NP=MQ$; следовательно, MN – средняя линия ΔADB; а PQ – средняя линия ΔCBD; $MN=PQ=\frac{1}{2}BD$.

Т.к. все ребра тетраэдра равны, то тетраэдр – правильный, а в правильном тетраэдре скрещивающиеся ребра взаимно перпендикулярны.

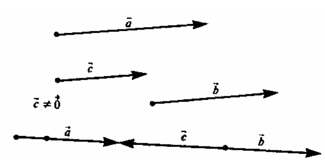
Тогда, BD⊥AC.

$$\left.\begin{array}{l} MN \parallel BD \parallel QP; \\ MQ \parallel NP \parallel AC; \\ BD \perp AC; \end{array}\right\} \text{четырехугольник } MNPQ \text{ – квадрат}$$

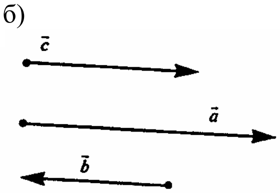
Ответ: а) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{QM}$, $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PC}$; б) квадрат.

324.

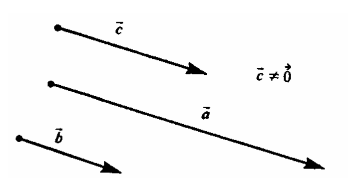
а)



б)



в)

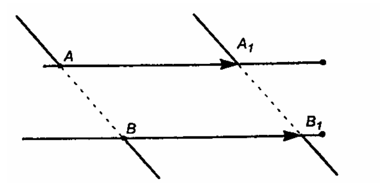


$\vec{a}$ и $\vec{b}$ – коллинеарны, но противоположно направлены.

Ответ: а) да; б) да; в) нет.

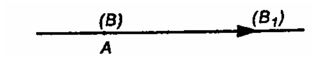
325.

а)



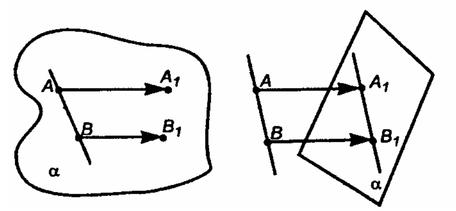
$AA_1 \parallel BB_1$, четырехугольник AA_1BB_1 – параллелограмм, следовательно, $AB \parallel A_1B_1$.

2-й случай:



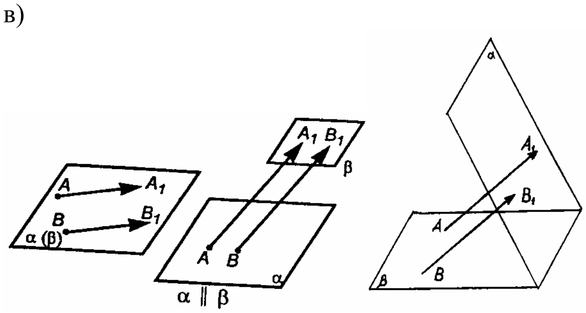
$\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ совпадают.

б)



$AB \subset \alpha$;
$A_1B_1 \subset \alpha$; } $AB \parallel A_1B_1$; $AB \parallel \alpha$.

в)



α и β совпадают; α и β пересекаются.

Ответ: а) параллельны или совпадают; б) лежит в плоскости или параллельна плоскости; в) совпадают, параллельны или пересекаются.

326. *Ответ:* а) $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{DK}$; в) $\overrightarrow{A_1C_1}$; г) $\overrightarrow{A_1B_1}$; д) $\overrightarrow{MB_1}$.

327. а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1D_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$;

б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AC_1}$ (по правилу параллелограмма);

в) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{B_1B}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{D_1D}=\overrightarrow{D_1D}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{D_1A}=\overrightarrow{C_1B}$;

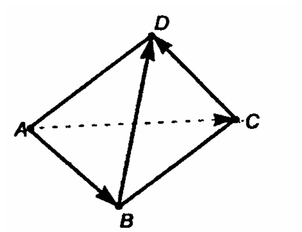
г) $\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB_1}$ (по правилу параллелограмма);

д) $\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{DC_1}$.

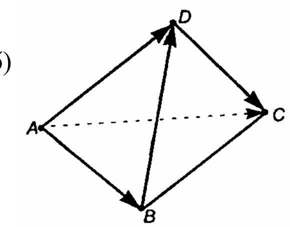
Ответ: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AC_1}$; в) $\overrightarrow{C_1B}$; г) $\overrightarrow{DB_1}$; д) $\overrightarrow{DC_1}$.

328.

а)



б)



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$,

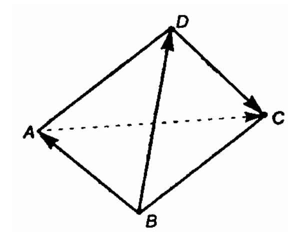
поэтому $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$.

используя переместительный закон, имеем:

$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$;

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, следовательно, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}$.

в) аналогично п. б) имеем:



$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}$;

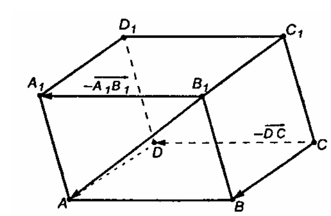
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$.

Следовательно, $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$.

329.

а) Противоположны $\overrightarrow{CB}$: $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{BC}$;

б) противоположны $\overrightarrow{B_1A}$: $\overrightarrow{DC_1}$, и $\overrightarrow{AB_1}$;

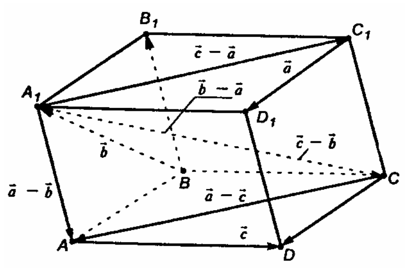


в) равны $\overrightarrow{DC}$: $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{BA}$;

г) равны $-\overrightarrow{A_1B_1}$: $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$; $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA}$.

330.

а) $\vec{a}-\vec{b}$: $\vec{a}=\overrightarrow{BA}$,



$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BA_1}$, или

$\vec{a}+\overrightarrow{AA_1}=\vec{b}$,

$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AA_1}$;

б) $\vec{a}-\vec{c}$: $\overrightarrow{C_1D_1}=\vec{a}=\overrightarrow{CD}$,

$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}$,

$\vec{a}+(-\vec{c})=\overrightarrow{CA}$, $\vec{a}-\vec{c}=\overrightarrow{CA}$.

в) $\vec{b}-\vec{a}$: $\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{BA}$, или $\vec{b}+\overrightarrow{A_1A}=\vec{a}$,

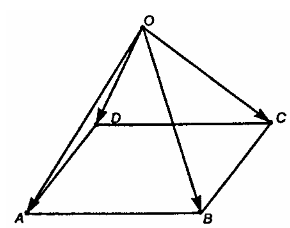
$\vec{b}-\vec{a}=-\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{BB_1}$;

г) $\vec{c}-\vec{b}$: $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\vec{c}$; $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA_1}=\vec{b}$,

или $\vec{c}+\overrightarrow{CA_1}=\vec{b}$, $\vec{c}-\vec{b}=-\overrightarrow{CA_1}=\overrightarrow{A_1C}$;

д) $\vec{c}-\vec{a}$: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{c}-\vec{a}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A_1C_1}$.

331.



а) $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}$,

$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{CD}$,

$-\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{CD}$, следовательно,

$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$.

б) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{BC}$, но $-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DA}$, поэтому $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{DA}$.

332.

Т.к. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – параллелепипед, то

$\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A_1A}$;

$\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1K}=-\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{KA_1}=\overrightarrow{KA_1}-\overrightarrow{A_1A}$.

Ответ: $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A_1A}$; $\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{KA_1}-\overrightarrow{A_1A}$.

333.

а) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{DC}+$

$+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD})+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CC}=\vec{0}$.

б) $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+$
$+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}.$

Ответ: а) $\vec{0}$; б) $\overrightarrow{DB}$.

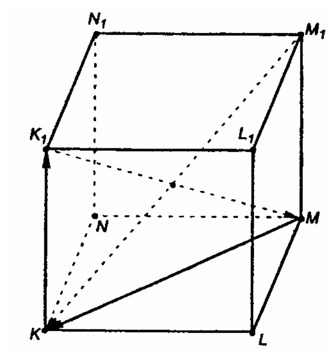
334.

а) $\left|\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MM_1}\right|=\left|\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{MM_1}\right|$; (1)

$\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{KK_1}=\overrightarrow{MK_1}$;

$\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{M_1K}+\overrightarrow{MK},\ \ \overrightarrow{MK}-\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{M_1K}.$

Диагонали в прямоугольном параллелепипеде равны, следовательно, $\left|\overrightarrow{MK_1}\right|=\left|\overrightarrow{M_1K}\right|$, таким образом, равенство (1) доказано.



б) $\left|\overrightarrow{K_1L_1}-\overrightarrow{NL_1}\right|=\left|\overrightarrow{ML}-\overrightarrow{MM}\right|$; (2)

$\overrightarrow{K_1L_1}+\overrightarrow{L_1N}=\overrightarrow{K_1N}\ \ (\overrightarrow{L_1N}=-\overrightarrow{NL_1}),$

$\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{LL_1}=\overrightarrow{ML_1}.$

Но $\left|\overrightarrow{K_1N}\right|=\left|\overrightarrow{ML_1}\right|$ как диагонали равных боковых граней; следовательно, (2) доказано.

в) $\left|\overrightarrow{NL}-\overrightarrow{M_1L}\right|=\left|\overrightarrow{K_1N}-\overrightarrow{LN}\right|$; (3)

$\overrightarrow{NL}+\overrightarrow{LM_1}=\overrightarrow{NM_1}(-\overrightarrow{M_1L}=\overrightarrow{LM_1}),$

$\overrightarrow{K_1N}+\overrightarrow{NL}=\overrightarrow{K_1L}(-\overrightarrow{LN}=\overrightarrow{NL}).$

Аналогично п. б): $\left|\overrightarrow{NM_1}\right|=\left|\overrightarrow{K_1L}\right|$, (3) доказано.

335. Используя свойство ассоциативности сложения векторов:

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NM})+$
$+\overrightarrow{PQ}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NM})+\overrightarrow{PQ}=\ =\vec{0}+\vec{0}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PQ}$;

б) $\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{QK}+\overrightarrow{PF}=(\overrightarrow{PF}+\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{KP})+$
$+(\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QK})+\overrightarrow{AM}=(\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{KP})+\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{AM}=\vec{0}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{AK}$;

в) $\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{MP}=(\overrightarrow{KM}+$

$+\overrightarrow{MP})+(\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FK})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{DK}+\vec{0}+\overrightarrow{CD}=$

$=\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KP}=\overrightarrow{CP}$;

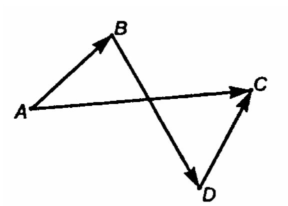
г) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{NM}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA})+$

$+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NM})=\vec{0}+\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}.$

Ответ: а) $\overrightarrow{PQ}$; б) $\overrightarrow{AK}$; в) $\overrightarrow{CP}$; г) $\vec{0}$.

336.

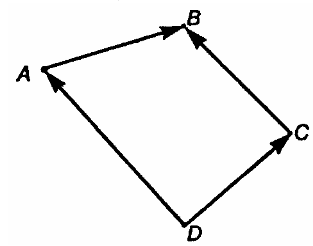
а) Т.к. $\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{DB}$, то



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=$

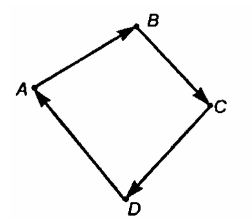
$=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BD}.$

б) Т.к. $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AD}$, то



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}.$

в) аналогично



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}.$

337. а) $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{KD}-\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{AK}=$

$=\overrightarrow{OE}+(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KD})=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{AD}$,т.к. $\overrightarrow{EP}=-\overrightarrow{PE}$ и $\overrightarrow{KA}=-\overrightarrow{AK}$;

б) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{EK}-\overrightarrow{EP}-\overrightarrow{MD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MP})+$

$+\overrightarrow{EK}+\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EK}=\overrightarrow{AK}$;

в) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM})+\overrightarrow{MP}+$

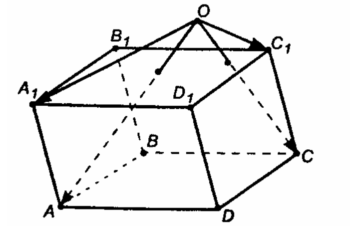
$+\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}.$

Ответ: а) $\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AK}$; в) $\vec{0}$.

338.

$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{C_1C}=\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{C_1C}$,

но $\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{C_1C}$, следовательно, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA_1}$.



339.

$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{D_1A_1}+\overrightarrow{CD_1}+\vec{x}+\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{DB}$, далее

$\overrightarrow{DC}+(\overrightarrow{CD_1}+\overrightarrow{D_1A_1})+\vec{x}+\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{DB}$, поэтому

$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CA_1}+\vec{x}+\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{DB}$, значит,

$\overrightarrow{DC}+\vec{x}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{DB}$, следовательно,

$\vec{x}+\overrightarrow{DC_1}=\overrightarrow{DB}$, отсюда $\vec{x}=\overrightarrow{C_1B}$.

б) $\overrightarrow{DA}+\vec{x}+\overrightarrow{D_1B}+\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}$, далее

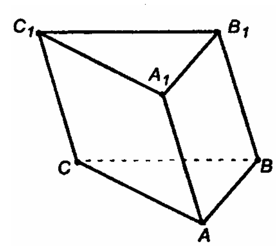
$(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD_1})+(\overrightarrow{D_1B}+\overrightarrow{BA})+\vec{x}=\overrightarrow{DC}$, поэтому

$\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1A}+\vec{x}=\overrightarrow{DC}$, значит,

$\overrightarrow{DA}+\vec{x}=\overrightarrow{DC}$, следовательно, $\vec{x}=\overrightarrow{AC}$.

Ответ: а) $\overrightarrow{C_1B}$; б) $\overrightarrow{AC}$.

340.



а) $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{B_1C}-\vec{x}=\overrightarrow{BA}$,

$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}$, поэтому $\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1C}-\vec{x}=\overrightarrow{BA}$,

$\overrightarrow{BC}-\vec{x}=\overrightarrow{BA}$,

$\overrightarrow{BC}=\vec{x}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\vec{x}$, отсюда $\vec{x}=\overrightarrow{AC}$.

б) $\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{BB_1}+\vec{x}=\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{AC_1}+\vec{x}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}$,

$\overrightarrow{AC_1}+\vec{x}=\overrightarrow{AB_1}$, значит, $\vec{x}=\overrightarrow{C_1B_1}$, или, т.к. $\overrightarrow{C_1B_1}=\overrightarrow{CB}$, $\vec{x}=\overrightarrow{CB}$.

в) $\overrightarrow{AB_1}+\vec{x}=\overrightarrow{AC}-\vec{x}+\overrightarrow{BC_1}$, но

$\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB_1}$, следовательно,

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB_1}+x=\overrightarrow{AC}-\vec{x}=\overrightarrow{BC_1}$, значит,

$\overrightarrow{CB_1}+\vec{x}=-\vec{x}+\overrightarrow{BC_1}$, отсюда

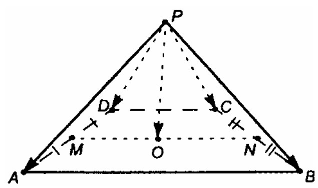
$2\vec{x}=\overrightarrow{BC_1}-\overrightarrow{CB_1}$, т.к.

$\overrightarrow{BC_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{CB_1}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BB_1}$, то

$2\vec{x}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BB_1}$, но $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CC_1}$, следовательно, $2\vec{x}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}$; $2\vec{x}=\overrightarrow{BC}-(-\overrightarrow{BC})=2\overrightarrow{BC}$, отсюда $\vec{x}=\overrightarrow{BC}$.

Ответ: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{BC}$.

341.



Пусть MN – средняя линия трапеции, а т. O – середина MN.

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BO}$,

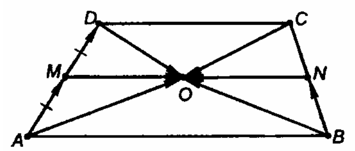
$\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{CO}$,

$\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DO}$.

Сложим почленно эти равенства, получим:

$4\cdot\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}$.

Найдем сумму $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}$:



$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{AO}$,

$\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{MO}$,

$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MD}$,

$\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NO}=\overrightarrow{BO}$,

$\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{NO}$, $\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{NO}-\overrightarrow{NC}$,

$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NO}-\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MD}$.

Учитывая, что $\overrightarrow{MO}=-\overrightarrow{NO}$, $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{NC}$.

Итак, $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{MO}-$

$-\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

Окончательно имеем $4\cdot\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$.

342.

Пусть PO – высота пирамиды.

Для грани PBC имеем:

$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MB}$, причем

$\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{MC}$, но $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MC}$, следовательно,

$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\cdot\overrightarrow{PM}$.

Для грани PBA имеем:

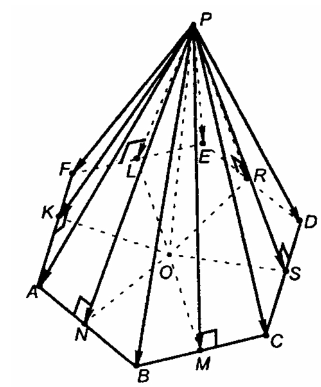
$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NA}$, причем

$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NB}$, но $\overrightarrow{NA}=-\overrightarrow{NB}$, следовательно, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\cdot\overrightarrow{PN}$.

Для грани PFA имеем:

$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{KA}$, причем:

$\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{KF}$, но $\overrightarrow{KF}=-\overrightarrow{KA}$, следовательно, $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PF}=2\cdot\overrightarrow{PK}$.



Следовательно, для каждой грани получаем векторное равенство вида: 2·(вектор-апофему)=(сумма векторов-ребер).

Пусть апофема 6-й грани будет PS:

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\cdot\overrightarrow{PN}$,

$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\cdot\overrightarrow{PA}$,

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PF}=2\cdot\overrightarrow{PK}$,

$\vdots$

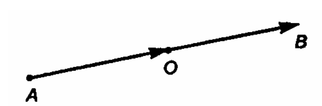
$\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=2\cdot\overrightarrow{PS}$.

Сложив эти равенства, будем иметь:

$2\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+...+\overrightarrow{PS})=2\cdot(\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PK}+...+\overrightarrow{PS})$ или

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF}=\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{PK}+\overrightarrow{PL}+\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{PM}$.

343.

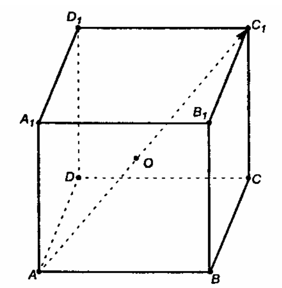


$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, т.к.

$\left|\overrightarrow{AO}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|$, и $\left|\overrightarrow{OB}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|$

Т.к. точки A, O, B принадлежат одному отрезку, и $AO = OB$, то т. A и B симметричны относительно т. O по определению симметрии.

344.



$\overrightarrow{AC_1} = k \cdot \overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{OB_1} = k \cdot \overrightarrow{B_1D}$.

а) $\overrightarrow{AB_1} = k \cdot \overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ противоположно направлены, значит, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$, $k = -1$.

б) $\overrightarrow{AC_1} = k \cdot \overrightarrow{AO}$.

Т.к. диагонали куба в точке пересечения делятся пополам и $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{AO}$ коллинеарны, то $\overrightarrow{AC_1} = 2 \cdot \overrightarrow{AO}$, $k = 2$.

в) $\overrightarrow{OB_1} = k \cdot \overrightarrow{B_1D}$.

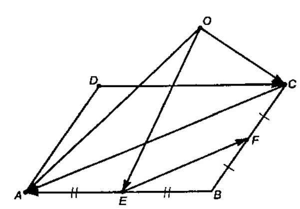
$\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{O_1B}$ противоположно направлены;

$\overrightarrow{OB_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB_1} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{B_1D}) = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{B_1D}$, $k = -\frac{1}{2}$.

Ответ: а) –1; б) $-\frac{1}{2}$.

345.

а) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{AC}$.



Т.к. EF – средняя линия в ΔABC, значит, $\overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{EF}$;

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = -2 \cdot \overrightarrow{EF}$.

б) $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{EA}$;

$\overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{DC}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$,

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

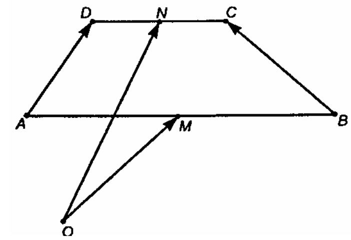
Ответ: а) $-2\overrightarrow{EF}$; б) $-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

346.

Т.к. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{ON}$; и $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}$, то

$\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{OA}-$

$-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=$



$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})-\overrightarrow{AD};$

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0},$

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}=\vec{0},$

тогда $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}.$

Значит, $\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC})-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}=$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}).$

Ответ: $-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}).$

347.

а) $2(\vec{m}+\vec{n})-3(\vec{m}-\vec{n})+\vec{m}=2\vec{m}+2\vec{n}-3\vec{m}+3\vec{n}+\vec{m}=5\vec{n};$

б) $\vec{m}-3(\vec{n}-2\vec{m}+\vec{p})+5(\vec{p}-4\vec{m})=\vec{m}-3\vec{n}+6\vec{m}-3\vec{p}+$

$+5\vec{p}-20\vec{m}=-13\vec{m}-3\vec{n}+2\vec{p}.$

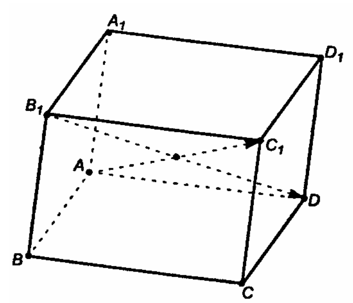
348.

Т.к. $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{B_1D}$ – диагонали параллелепипеда, то

$\overrightarrow{B_1D}=\overrightarrow{B_1A}+\overrightarrow{AD},$

$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC_1},$ значит,

$\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{B_1D}=\overrightarrow{B_1A}+2\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC_1}.$



Но $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{B_1A}=\overrightarrow{C_1D}=-\overrightarrow{DC_1},$

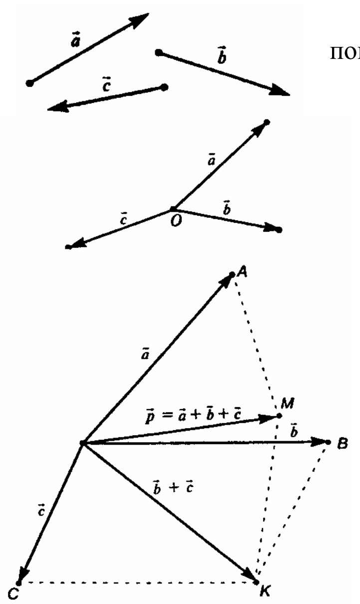
тогда

$\overrightarrow{AC_1}+\overrightarrow{B_1D}=-\overrightarrow{DC_1}+2\cdot\overrightarrow{BC}+DC_1=2\cdot\overrightarrow{BC}.$

349.

См. учебник.

350.



Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ расположены так, как показано на рисунке.

Параллельным переносом совместим их так, чтобы три вектора имели общее начало.

Построим векторы $\vec{b}+\vec{c}$ и $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

В Δ OMK: $\vec{p}=\overrightarrow{OM}$, $\left|\overrightarrow{OK}\right|=\left|\vec{b}+\vec{c}\right|$, $\left|\overrightarrow{KM}\right|=\left|\vec{a}\right|$, $\left|\vec{a}\right|<\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{a}+\vec{c}\right|$. Аналогично:

в ΔOCK: $\left|\overrightarrow{OK}\right|<\left|\vec{b}\right|+\left|\vec{c}\right|$.

Следовательно, $\left|\vec{p}\right|<\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|+\left|\vec{c}\right|$.

Что и требовалось доказать.

351.

$\vec{a}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны.

а) прямые, содержащие $\vec{a}$ и $\vec{c}$, либо параллельны, либо совпадают; прямые, содержащие $\vec{b}$ и $\vec{c}$, тоже либо параллельны, либо совпадают; кроме того, две прямые, параллельные третьей, тоже параллельны.

Т.е. $\vec{a} \parallel \vec{c}$, $\vec{b} \parallel \vec{c}$, значит, $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Значит, $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ либо лежат на параллельных прямых, либо на одной, то есть коллинеарны по определению.

б) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны; $-\vec{b}$ коллинеарен $\vec{b}$, значит, $\vec{a}+(-\vec{b})$ коллинеарен и $\vec{a}$ и $\vec{b}$. По условию $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны, следовательно, $\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{c}$ тоже коллинеарны.

в) $\vec{b}$ и $3\vec{b}$ – коллинеарны, а раз $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{b}$ – тоже коллинеарны. По условию, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ - коллинеарны, тогда $\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{c}$ – коллинеарны.

г) $\vec{a}$ и - $\vec{a}$ - коллинеарны, поэтому - $\vec{a}+2\vec{b}$ коллинеарны $\vec{b}$. Но $\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны по условию, значит, - $\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{c}$ коллинеарны.

352.

$\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарны. Пусть $\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}$, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$. По условию, $\vec{d}=k\cdot\vec{c}$.

$\vec{a}+\vec{b}=k(\vec{a}-\vec{b})$, $\vec{a}+\vec{b}=k\vec{a}-k\vec{b}$, $\vec{b}(1+k)=\vec{a}(k-1)$;

$\vec{b}=\dfrac{k-1}{1+k}\vec{a}$, $\vec{b}=l\cdot\vec{a}$, где $l=\dfrac{k-l}{l+k}$. Равенство $\vec{b}=l\cdot\vec{a}$ означает коллинеарность $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

353.

$\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{a}-3\vec{b}$ коллинеарны. Пусть $\vec{a}+2\vec{b}=\vec{d}$, $\vec{a}-3\vec{b}=\vec{c}$. По условию, $\vec{d}=\lambda\vec{c}$, $\vec{a}+2\vec{b}=\lambda(\vec{a}-3\vec{b})$, $\vec{a}+2\vec{b}=\lambda\vec{a}-\lambda 3\vec{b}$, $\vec{b}(2+3\lambda)=\vec{a}(\lambda-1)$;

$\vec{b}=\dfrac{\lambda-1}{2+3\lambda}=\mu\vec{a}$, где $\mu=\dfrac{\lambda-1}{2+3\lambda}$. Равенство $\vec{b}=\mu\vec{a}$ означает коллинеарность векторов $\vec{b}$ и $\vec{a}$.

354.

$\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарность.

а) Пусть $\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}$, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$. Предположим, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то есть $\vec{b}=\lambda\vec{a}$. $\vec{d}=\vec{a}+\lambda\vec{a}=\vec{a}(1+\lambda)$, $\vec{a}=\dfrac{1}{1+\lambda}\vec{d}$, $\vec{c}=\vec{a}-\lambda\vec{a}=\vec{a}(1-\lambda)$, $\vec{a}=\dfrac{1}{1-\lambda}\vec{c}$. Откуда $\dfrac{1}{1+\lambda}\vec{d}=\dfrac{1}{1-\lambda}\vec{c}$, $\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\vec{d}=\vec{c}$, или $l\cdot\vec{d}=\vec{c}$, где $l=\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$, то есть векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ - коллинеарны, что противоречит условию задачи. Значит, наше предположение неверно, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - не коллинеарны.

б) Пусть $\vec{a}+2\vec{b}=\vec{d}$, $2\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$. Предположим, что векторы $\vec{a}+2\vec{b}$ и $2\vec{a}-\vec{b}$ коллинеарны, тогда $\vec{d}=\lambda\vec{c}$. $\vec{a}+2\vec{b}=2\lambda\vec{a}-\lambda\vec{b}$, $(2+\lambda)\vec{b}=\vec{a}(2\lambda-1)$, $\dfrac{2+\lambda}{2\lambda-1}\vec{b}=\vec{a}$, или $k\vec{b}=\vec{a}$, где $k=\dfrac{2+\lambda}{2\lambda-1}$.

Имеем:

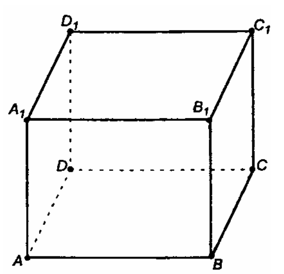
$\vec{a}+\vec{b}=k\vec{b}+\vec{b}=\vec{b}(1+k)$, $\quad \vec{a}-\vec{b}=k\vec{b}-\vec{b}=\vec{b}(1-k)$, $\quad \vec{b}=\dfrac{1}{k+1}(\vec{a}+\vec{b})$,

$\vec{b}=\dfrac{1}{k+1}(\vec{a}+\vec{b})$, $\quad \vec{b}=\dfrac{\vec{a}-b}{l-k}$, $\quad \dfrac{1}{k+1}(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{1}{1-k}(\vec{a}-\vec{b})$,

$\dfrac{l-k}{l+k}(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$, или $m(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$, где $m=\dfrac{l-k}{l+k}$.

Таким образом, предположим коллинеарность векторов $\vec{a}+2\vec{b}$ и $2\vec{a}-\vec{b}$, получим коллинеарность векторов $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, что противоречит условию задачи. Значит, предположение сделано неверно, векторы $\vec{a}+2\vec{b}$ и $2\vec{a}-\vec{b}$ не коллинеарны.

355.



а) $\overrightarrow{\mathrm{AA}_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{C}C_1}$, $\overrightarrow{\mathrm{B}B_1}$ – компланарны (они равны).

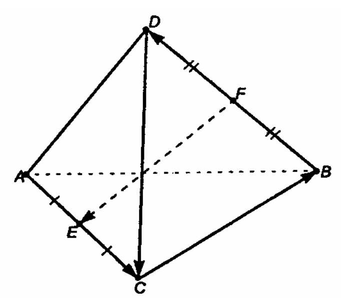
б) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$ – не компланарны.

в) $\overrightarrow{B_1B}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AA_1}$ – компланарны ($\overrightarrow{B_1B}$ коллинеарен $\overrightarrow{DD_1}$, параллельным переносом совмещаем векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{B_1B}$, получаем, что они принадлежат одной плоскости).

г) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$ – не компланарны.

Ответ: а), в).

356.



Введем векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$.

$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}$. (1)

$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}$. (2)

Из (1) следует, что

$\overrightarrow{FE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{EC}=$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EC}$. (3)

Из (2) получим: $\overrightarrow{FE}=-\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. (4)

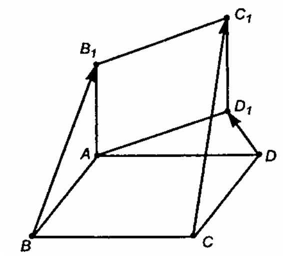
Сложим (3) и (4), получим: $2\cdot\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{FE}=\dfrac{\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BA}}{2}$.

По определению, векторы $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$ компланарны.

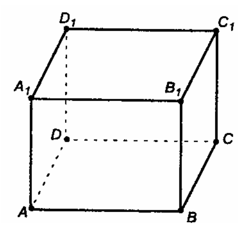
357.

$\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1C_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{AB_1}=$

$=\overrightarrow{DD_1}+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB_1})=\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{BB_1}\Rightarrow$ вектора $\overrightarrow{CC_1},\overrightarrow{DD_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$ – компланарны по определению.



358.



а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}=$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC_1}$.

б) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{DB_1}$.

в) $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{C_1B_1}+\overrightarrow{BB_1}=$

$=\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{D_1A_1}+\overrightarrow{BB_1}=(\overrightarrow{D_1A_1}+\overrightarrow{A_1B_1})+$

$+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{D_1B_1}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{DB_1}$.

г) $\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1D}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1D}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{A_1C}$.

д) $\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1A_1})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD_1}$.

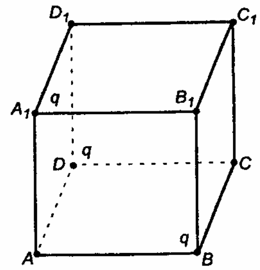
Ответ: а) $\overrightarrow{AC_1}$; б) $\overrightarrow{DB_1}$; в) $\overrightarrow{DB_1}$; г) $\overrightarrow{A_1C}$; д) $\overrightarrow{BD_1}$.

359.

а) $\vec{E}(A)=\dfrac{kq}{a^3}\overrightarrow{A_1A}+\dfrac{kq}{a^3}\overrightarrow{BA}=\dfrac{kq}{a^3}\times$

$\times(-\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=$

$=\dfrac{kq}{a^3}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})=\dfrac{kq}{a^3}\overrightarrow{AC_1}$.



$\vec{E}(C_1) = \frac{k \cdot q}{(a\sqrt{2})^3}\overrightarrow{A_1C_1} + + \frac{k \cdot q}{(a\sqrt{2})^3}\overrightarrow{DC_1} + \frac{k \cdot q}{(a\sqrt{2})^3}\overrightarrow{BC_1}$, учитывая, что

$\left|\overrightarrow{A_1C_1}\right| = \left|\overrightarrow{DC_1}\right| = \left|\overrightarrow{BC_1}\right| = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$, получим

$\vec{E}(C_1) = \frac{kq}{2\sqrt{2a}^3}(\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{DC_1} + \overrightarrow{BC_1})$.

Т.к. $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC_1}$; $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC_1}$ и

$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1C_1}$, то, сложив эти равенства, получим, что

$3 \cdot \overrightarrow{AC_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}) + (\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{DC_1} + \overrightarrow{BC_1})$; или

$3 \cdot \overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{A_1C_1} + (\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{DC_1} + \overrightarrow{BC_1})$, или

$\overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{DC_1} + \overrightarrow{BC_1} = 2 \cdot \overrightarrow{A_1C_1}$.

$\vec{E}(C_1) = \frac{kq}{2\sqrt{2a}^3} \cdot 2 \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}kq\overrightarrow{AC_1}$.

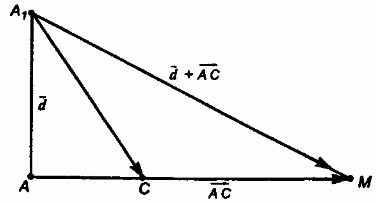
б) $\vec{E}(C) = \frac{kq}{(a\sqrt{3})^3}\overrightarrow{A_1C} + \frac{kq}{a^3}\overrightarrow{DC} + \frac{kq}{a^3}\overrightarrow{BC} = \frac{kq}{3\sqrt{3}a^3}\overrightarrow{A_1C} +$

$+ \frac{kq}{a^3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \frac{kq}{3\sqrt{3}a^3}\overrightarrow{A_1C} + \frac{kq}{a^3}\overrightarrow{AC} = \frac{kq}{a^3}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{AC}\right)$,

$\left|\overrightarrow{A_1C}\right| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$.

Пусть $\vec{d} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\overrightarrow{A_1C}$, значит, $\left|\vec{d}\right| = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left|\overrightarrow{A_1C}\right| = \frac{a\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{a}{3}$.

Из Δ ACA_1 имеем: $\cos\angle ACA_1 = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.



По т. косинусов получим:

$\left|\vec{d} + \overrightarrow{AC}\right|^2 = \left|\vec{d}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 - 2\left|\vec{d}\right| \cdot \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos \angle ACM$; далее

$\left|\vec{d} + \overrightarrow{AC}\right|^2 = \frac{a^2}{9} + 2a^2 + 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, т.к.

$\cos \angle A_1CM = \cos(180^\circ - \angle ACA_1) = -\cos ACA_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ то

$$\left|\vec{d} + \overrightarrow{AC}\right|^2 = a^2\left(\frac{1}{9} + 2 + \frac{4}{3\sqrt{3}}\right) = a^2 \frac{\sqrt{3} + 18\sqrt{3} + 12}{9\sqrt{3}} =$$

$$= a^2 \cdot \frac{19\sqrt{3} + 12}{9\sqrt{3}} = a^2 \cdot \frac{19 \cdot 3 + 12\sqrt{3}}{9 \cdot 3} = a^2 \cdot \frac{19 + 4\sqrt{3}}{9},$$ следовательно,

$\left|\vec{d} + \overrightarrow{AC}\right| = a \cdot \frac{\sqrt{19 + 4\sqrt{3}}}{3}$, тогда

$$\left|\vec{E}(C)\right| = \frac{kq}{a^3} \cdot \left|\vec{d} + \overrightarrow{AC}\right| = \frac{kq}{a^3} \cdot a \frac{\sqrt{19 + 4\sqrt{3}}}{3} = \frac{kq}{3a^2}\sqrt{19 + 4\sqrt{3}};$$

$$\left|\vec{E}(B_1)\right| = \frac{kq}{a^3}\overrightarrow{A_1B_1} + \frac{kq}{a^3}\overrightarrow{BB_1} + \frac{kq}{a^3 \cdot 3\sqrt{3}}\overrightarrow{DB_1} = \frac{kq}{3\sqrt{3}a^3}\overrightarrow{DB_1} +$$

$$+ \frac{kq}{a^3}(\overrightarrow{A_1A_1} + \overrightarrow{A_1B_1}) = \frac{kq}{3\sqrt{3}a^3}\overrightarrow{DB_1} + \frac{kq}{a^3}\overrightarrow{A_1B_1}.$$

Пусть $\vec{d} = \frac{1}{3\sqrt{3}}\overrightarrow{DB_1}$, значит, $\left|\vec{d}\right| = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left|\overrightarrow{DB_1}\right| = \frac{a\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{a}{3}$;

$$\vec{E}(B_1) = \frac{kq}{a^3}(\vec{d} + \overrightarrow{A_1B_1}),$$

$$\left|\vec{E}(B_1)\right| = \frac{kq}{a^3}\left|\vec{d} + \overrightarrow{A_1B_1}\right|;$$

$$\left|\vec{d} + \overrightarrow{A_1B_1}\right|^2 = \left|\vec{d}\right|^2 + \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|^2 - 2\left|\vec{d}\right|^2 \cdot \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| \cdot \cos(\vec{d}\,\overrightarrow{A_1B_1});$$

$\cos(\overrightarrow{dA_1B_1}) = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right| = a\sqrt{2},$

$\left|\vec{d} + \overrightarrow{A_1B_1}\right|^2 = a^2\left(\frac{1}{9} + 2 + \frac{4}{3\sqrt{3}}\right) = a^2 \cdot \frac{19 + 4\sqrt{3}}{9},$

$\left|\vec{d} + \overrightarrow{A_1B_1}\right|^2 = \frac{a}{3}19 + 4\sqrt{3},$

$\left|\vec{E}(\overrightarrow{B_1})\right| = \frac{kq}{a^3} \cdot \frac{a}{3}\sqrt{19 + 4\sqrt{3}} = \frac{kq}{3a^2}\sqrt{19 + 4\sqrt{3}}.$

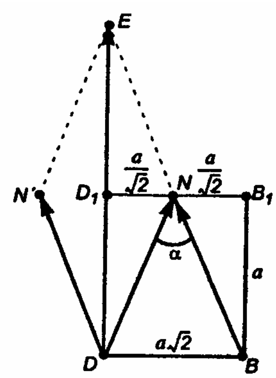
Пусть M – центра грани $A_1B_1C_1D_1$, тогда:

$\left|\vec{E}(M)\right| = \frac{kq}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3}\overrightarrow{A_1M} + \frac{kq}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^3}\overrightarrow{BM} + \frac{kq}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^3}\overrightarrow{DM}$, т.к.

$\left|\overrightarrow{A_1M}\right| = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, то

$\left|\overrightarrow{BM}\right| = \left|\overrightarrow{DM}\right| = a^2 + \frac{a^2}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, значит,

$\vec{E}(M) = \frac{kq}{a^3} \cdot 2\sqrt{2}\,\overrightarrow{A_1M} + \frac{kq \cdot 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}a^3}(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DM}).$



Для сложения векторов $\overrightarrow{DM}$ и $\overrightarrow{BM}$, параллельно перенесем BM так, чтобы точка B перешла в точку D; получим $\overrightarrow{DM}'$. Значит, по правилу параллелограмма $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{DM}'$.

Из ΔDMB получим, что $D_1M = M_1B = \frac{a}{\sqrt{2}}$, тогда

$MB = DM = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$

По теореме косинусов получим:

$2a^2 = 2 \cdot a^2 \cdot \frac{3}{2} - 2 \cdot a^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos\alpha$, тогда

$2 = 3 - 3\cos\alpha$, и $\cos\alpha = \frac{1}{3}.$

Из $\Delta\, DME$ получим:

$$DE^2 = EM^2 + DM^2 - 2 \cdot EM \cdot DM \cdot \cos(180^\circ - \alpha) =$$

$$= 2 \cdot DM^2 + 2 \cdot DM^2 \cos\alpha = 2 \cdot a^2 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot a^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = 3a^2 + a^2 = 4a^2;$$

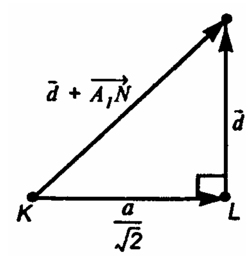
$DE = 2a.$

$$\vec{E}(M) = \frac{2\sqrt{2k}q}{a^3}(\overrightarrow{A_1M} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \overrightarrow{DE}), \text{ значит}$$

$$\left|\vec{E}(M)\right| = \frac{2\sqrt{2k}q}{a^3}(\left|\overrightarrow{A_1M} + \vec{d}\right|), \text{ где } \vec{d} = \frac{\overrightarrow{DE}}{3\sqrt{3}}, \text{ т.е.}$$

$$\left|\vec{d}\right| = \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \left|\overrightarrow{DE}\right| = \frac{2a}{3\sqrt{3}}.$$

Параллельно перенесем $\overrightarrow{A_1M}$ так, чтобы точки M и D совпали; получим вектор $\overrightarrow{KL}$.

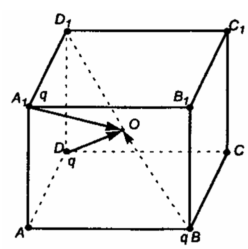


$$\left|\vec{d} + \overrightarrow{A_1M}\right| = \left|\vec{d} + \overrightarrow{KL}\right| = \sqrt{\left|\vec{d}\right|^2 + \left|\overrightarrow{KL}\right|^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{4a^2}{27} + \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{27a^2 + 8a^2}{2 \cdot 27}} = \frac{\sqrt{35} \cdot a}{\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3}};$$

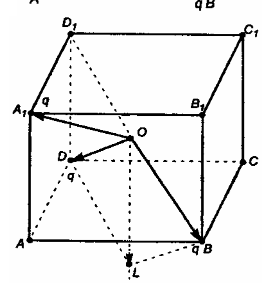
$$\left|\vec{E}(M)\right| = \frac{2\sqrt{2} \cdot k \cdot q}{a^3} \cdot \frac{a \cdot \sqrt{35}}{\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3}} = = \frac{kq}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{35}}{3\sqrt{3}} = \frac{kq}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{105}}{9}.$$

Пусть O – центр куба, тогда:



$$\left|\vec{E}(O)\right| = \frac{kq}{\left|\overrightarrow{A_1O}\right|^3}\overrightarrow{A_1O} + \frac{kq}{\left|\overrightarrow{DO}\right|^3}\overrightarrow{DO} + \frac{kq}{\left|\overrightarrow{BO}\right|^3}\overrightarrow{BO}.$$

Т.к. длины всех векторов составляют половину диагонали куба, то есть $\frac{1}{2}(a\sqrt{3}) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Следовательно



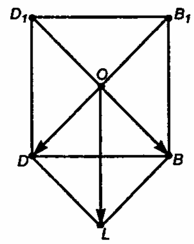
$$\vec{E}(O) = \frac{kq \cdot 8}{3\sqrt{3} \cdot a^3}(\overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{BO}) =$$

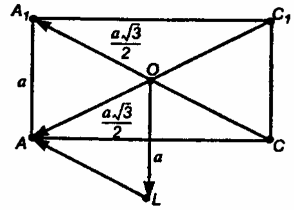
$$= \frac{8kq}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{kq}{a^3}(-\overrightarrow{A_1O} - \overrightarrow{DO} - \overrightarrow{BO}) =$$

$$= \frac{8kq}{3\sqrt{3}a^3}(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}).$$

Имеем следующие равенства:

$\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OL},\ \ \left|\overrightarrow{OD}\right|+\left|\overrightarrow{OB}\right|=\dfrac{a}{\sqrt{2}}.$





$\left|\overrightarrow{OL}\right|=a,\ \ \overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OA},\ \ \left|\overrightarrow{OA}\right|=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.$

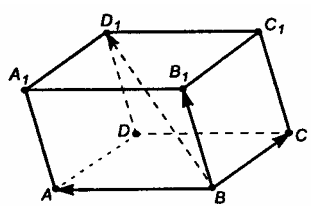
Тогда $\vec{E}(O)=-\dfrac{8kq}{3\sqrt{3}a^3}\overrightarrow{OA},$ значит,

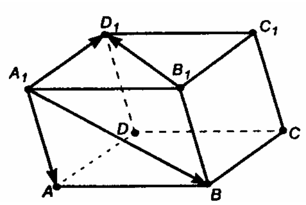
$$\left|\vec{E}(O)\right|=\left|-\frac{8kq}{3\sqrt{3}a^3}\overrightarrow{OA}\right|=\frac{8kq}{3\sqrt{3}a^3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{4kq}{3a^2}.$$

Ответ: а) $-\dfrac{kq}{a^3}\overrightarrow{AC_1},\ \dfrac{\sqrt{2}kq}{2a^3}\overrightarrow{AC_1},$ б) $\dfrac{kq}{3a^2}\sqrt{19+4\sqrt{3}},$

$\dfrac{kq}{3a^2}\sqrt{19+4\sqrt{3}},\ \dfrac{2kq}{9a^2}\sqrt{105},\ \dfrac{4kq}{3a^2}.$

360.





а) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD};$

$\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BD_1}.$

$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}.$

б) $\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{B_1D_1};$

$\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B};$

$\overrightarrow{B_1A_1}=-\overrightarrow{AB}.$

$\overrightarrow{B_1D_1}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1D_1}=-(\overrightarrow{A_1B}-$

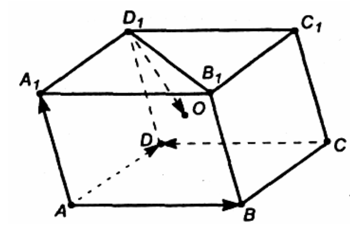
$-\overrightarrow{A_1A})+\overrightarrow{A_1D_1}=\overrightarrow{A_1A_1}-\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{A_1D_1}.$

$\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1};$

$\overrightarrow{B_1D_1}=\overrightarrow{A_1A}-\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{A_1D_1}.$

361.

$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$, следовательно, $\overrightarrow{CD} = 0\cdot\overrightarrow{AD} - 1\cdot\overrightarrow{AB} + 0\cdot\overrightarrow{AA_1}$.



Далее, $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD_1}$,

$\overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{D_1B} = \overrightarrow{AB}$, но

$\overrightarrow{D_1B} = 2\cdot\overrightarrow{D_1O}$, значит

$\overrightarrow{AD_1} + 2\cdot\overrightarrow{D_1O} = \overrightarrow{AB}$, тогда

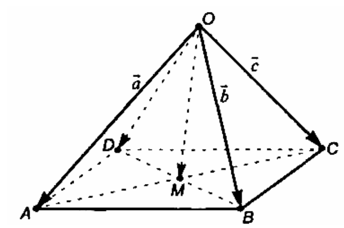
$\overrightarrow{D_1O} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD})$.

Ответ: а) $\overrightarrow{CD} = 0\cdot\overrightarrow{AD} - 1\cdot\overrightarrow{AB} + 0\cdot\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{D_1O} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

362. См. решение в учебнике

363.

$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$.



$\vec{c} + \overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c}$;

$\vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$;

$\overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{c} + \vec{b} - \vec{a} = 2\vec{b} - \vec{c} - \vec{a}$;

тогда

$\overrightarrow{OD} = \vec{b} - (2\vec{b} - \vec{c} - \vec{a}) = \vec{b} - 2\vec{b} + \vec{c} + \vec{a} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Значит, $\overrightarrow{OD} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

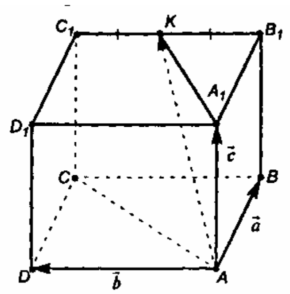
$\overrightarrow{OM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \vec{b}$;

$\overrightarrow{OM} = \vec{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \vec{b} - \frac{1}{2}(2\vec{b} - \vec{c} - \vec{a}) = \vec{b} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Ответ: а) $\overrightarrow{OD} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; б) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a} + 0\cdot\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

364.

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = m$. Имеем:



$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1K} = \overrightarrow{AK}$;

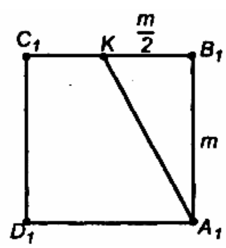
$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} = \overrightarrow{AK}$; т.е.

$\overrightarrow{AK} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$, т.к.

$\overrightarrow{C_1K} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AD}) = -\frac{1}{2}\vec{b}$.

Построим отрезок A_1K. Для ΔAA_1K по теореме Пифагора:

$AK = \sqrt{AA_1^2 + A_1K^2}$.



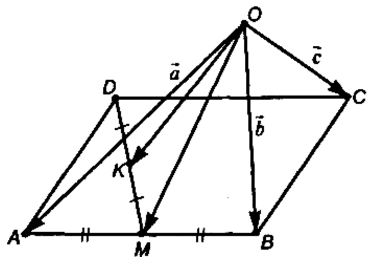
$$A_1K = \sqrt{m^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^2} = \sqrt{m^2 + \frac{m^2}{4}} = \frac{m\sqrt{5}}{2};$$

$$\left|\overrightarrow{AK}\right| = \sqrt{m^2 + \frac{5m^2}{4}} = \sqrt{\frac{9m^2}{4}} = \frac{3m}{2}.$$

Ответ: $\overrightarrow{AK} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$, $\left|\overrightarrow{AK}\right| = \frac{3m}{2}$.

365.

Достроим ΔAOB до параллелограмма. Тогда имеем:



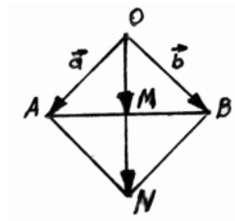
$2\overrightarrow{OM} = \vec{a} + \vec{b}$,

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$.

$\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{OM}$.

$\overrightarrow{OK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{OM}$.

Т.к. $\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{O}$



$\overrightarrow{DM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{O}$;

и $\vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$,

$\vec{b} + \overrightarrow{BC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$,

$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$, то имеем:

$\overrightarrow{DM} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} - \vec{b} + \vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$;

$\overrightarrow{DM} + \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$;

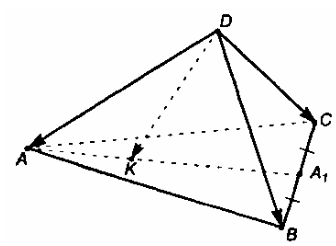
$\overrightarrow{DM} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}$; тогда $\overrightarrow{OK} + \frac{1}{2}(\frac{3}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$;

$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Ответ: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$, $\overrightarrow{OK} = \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

366. См. решение в учебнике.

367.



$AK : KA_1 = 3 : 7$.

$\overrightarrow{AK} = \lambda \cdot \overrightarrow{KA_1}$, $\lambda = \frac{3}{7}$.

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KA_1} = \overrightarrow{DA_1}$,

значит,

$\vec{DK}-\vec{DA}=\lambda\cdot(\vec{DA_1}-\vec{DK})$, или $\vec{DK}(1+\lambda)=\vec{DA}+\lambda\,\vec{DA_1}$;

$$\vec{DK}=\frac{\vec{DA}+\lambda\,\vec{DA_1}}{1+\lambda}.$$

$$\vec{DA_1}=\frac{1}{2}(\vec{DC}+\vec{DB}).$$

Таким образом,

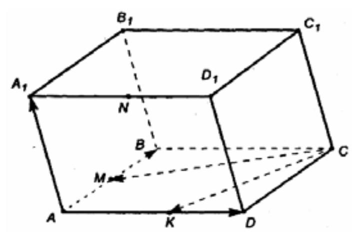
$$\vec{DK}=\frac{\vec{DA}+\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}(\vec{DC}+\vec{DB})}{1+\frac{3}{7}}=\frac{14\,\vec{DA}+3\,\vec{DC}+3\,\vec{DB}}{14+6}=$$

$$=\frac{14\,\vec{DA}+3\,\vec{DC}+3\,\vec{DB}}{20}=0{,}7\,\vec{DA}+0{,}15\,\vec{DC}+0{,}15\,\vec{DB}.$$

Ответ: $\vec{DK}=0{,}7\,\vec{DA}+0{,}15\,\vec{DC}+0{,}15\,\vec{DB}$.

368.

а) $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{AD}$.



б) $\vec{MB}+\vec{BC}=\vec{MC}=-\vec{CM}$.

$\vec{MB}=\frac{1}{2}\vec{AB}$, $\vec{BS}=\vec{AD}$, следовательно,

$$\vec{CM}=-\left(\frac{1}{2}\vec{AB}+\vec{AD}\right)==-\frac{1}{2}\vec{AB}-\vec{AD}.$$

в) Пусть K – середина ребра AD. Значит, $\vec{C_1N}=\vec{CK}$,

$\vec{KD}+\vec{DC}=\vec{KC}=-\vec{CK}$, $\vec{KD}=\frac{1}{2}\vec{AD}$, $\vec{DC}=\vec{AB}$, следовательно,

$$\vec{CK}=-\left(\frac{1}{2}\vec{AD}+\vec{AB}\right)=-\frac{1}{2}\vec{AD}-\vec{AB},\ \vec{C_1N}=-\frac{1}{2}\vec{AD}-\vec{AB}.$$

г) $\overrightarrow{AC_1}$ разложить по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ нельзя, т.к. эти векторы не компланарны.

д) $\overrightarrow{A_1N} = \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + 0 \cdot \overrightarrow{AB}$.

е) $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ не компланарны, следовательно, разложить $\overrightarrow{AN}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ нельзя.

ж) $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD}$, т.к. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, то

$\overrightarrow{MD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$, т.е. $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Ответ: а) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

б) $\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

в) $\overrightarrow{C_1N} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

г) нельзя.

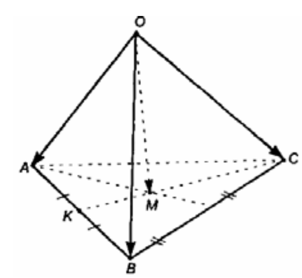
д) $\overrightarrow{A_1N} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + 0 \cdot \overrightarrow{AB}$.

е) нельзя.

ж) $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

369.

Дополнив ΔAOB до параллелограмма, получим по правилу параллелограмма, что $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.



Т.к. CM – медиана, то $\overrightarrow{CM} = 2 \cdot \overrightarrow{MK}$, но $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{OK}$, значит,
$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OC} = 2 \cdot (\overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OM}) =$
$= 2 \cdot \overrightarrow{OK} - 2 \cdot \overrightarrow{OM}$,

$3 \cdot \overrightarrow{OM} = 2 \cdot \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OC}$, откуда

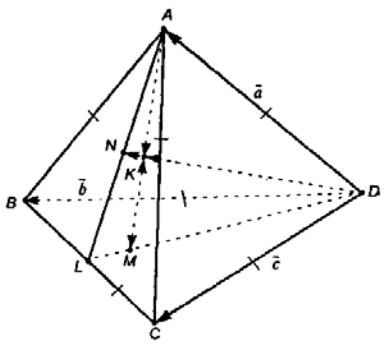
$$\vec{OM} = \frac{2\cdot(\vec{OK}+\vec{OC})}{3} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}(\vec{OA}+\vec{OB})+\vec{OC}}{3} = \frac{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}}{3}; \text{ т.е.}$$

$3\cdot\vec{OM} = \vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}$, откуда $\vec{OA} = 3\cdot\vec{OM} - \vec{OB} - \vec{OC}$.

Ответ: $\vec{OA} = 3\cdot\vec{OM} - \vec{OB} - \vec{OC}$.

370.

$DN \perp$ пл. ABC, $AM \perp$ пл. BCD.



Т.к. тетраэдр правильный, то $BD=DC=BC=AB=AC=AD$, или $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$.

Продлим AN до пересечения с BC в точке E и проведем DE.

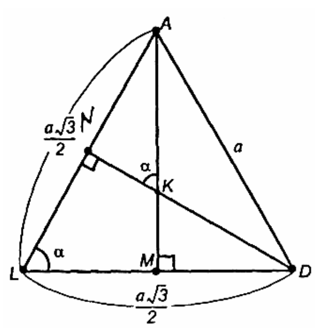
$AE \perp BC$, $DE \perp BC$, точки N и M – центры граней тетраэдра, тогда они являются точками пересечения медиан.

Значит, $\vec{DN} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$, и $\vec{AM} = \frac{1}{3}(\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AC})$.

$\vec{a} + \vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\vec{a} + \vec{AC} = \vec{c}$, $\vec{AC} = \vec{c} - \vec{a}$, $\vec{AD} = \vec{a}$.

Следовательно,

$$\vec{AM} = \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c} - \vec{a} - \vec{a}) = \frac{1}{3}(-3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}.$$



$\vec{DK} = \lambda\cdot\vec{DN}$. Найдем λ.

Пусть ребро тетраэдра равно a.

$a^2 = 2\cdot\frac{a^2\cdot 3}{4} - 2\cdot\frac{a^2\cdot 3}{4}\cdot\cos\alpha$, следовательно, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

По теореме синусов $\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2R$, значит, $R = NA = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

$\frac{NA}{NK} = tg\alpha$, $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\sqrt{2}$, $NK = \frac{a}{\sqrt{3}}\frac{1}{tg\alpha} = \frac{a}{2\sqrt{6}}$.

Из ΔLND имеем: $ND = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2a}{\sqrt{6}}$.

Таким образом, $DK = ND - KN = \frac{2a}{\sqrt{6}} - \frac{a}{2\sqrt{6}} = \frac{3a}{2\sqrt{6}}$.

$DK = \frac{3a}{2\sqrt{6}}$, $ND = \frac{2a}{\sqrt{6}}$;

$\frac{DK}{DN} = \frac{3a}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{3}{4}$; $DK = \frac{3}{4}DN$, значит, $\overrightarrow{DK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DN}$, $\lambda = \frac{3}{4}$.

Окончательно имеем, что

$\overrightarrow{DK} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$.

Следовательно, $KM = KN = \frac{a}{2\sqrt{6}}$, и $AM = DN = \frac{2a}{\sqrt{6}}$,

$\frac{KM}{AM} = \frac{a}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2a} = \frac{1}{4}$, $KM = \frac{1}{4}AM$, следовательно

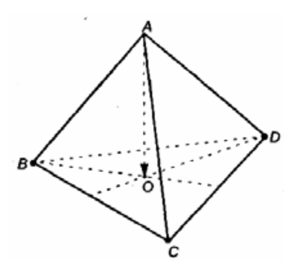
$\lambda = \frac{1}{4}$, тогда $\overrightarrow{KM} = \frac{1}{4}(-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}) = \frac{1}{12}\vec{b}+\frac{1}{12}\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{a}$, а

$\overrightarrow{MK} = -\overrightarrow{KM} = \frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{12}\vec{b}-\frac{1}{12}\vec{c}$.

Ответ: а) $\overrightarrow{DN} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$; б) $\overrightarrow{DK} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$;

в) $\overrightarrow{AM} = -\vec{a}+\frac{\vec{b}}{3}+\frac{\vec{c}}{3}$; г) $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{12}\vec{b}-\frac{1}{12}\vec{c}$.

371.



Если точка O – точка пересечения медиан ΔBCD, а точка A – произвольная. Точка пространства, то имеет место равенство:

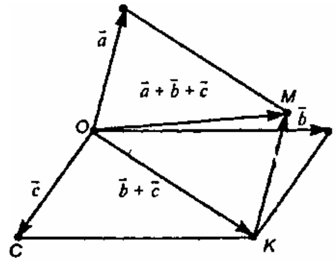
$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$.

Докажем, что

$AO < \frac{1}{3}(AB + AC + AD)$.

Перенесем вектор так, чтобы они имели общее начало – т. O. Построим вектора $(\vec{b}+\vec{c})$ и $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

В ΔOMK имеем: $\overrightarrow{KM}=\vec{a}$;



$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|<\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}+\vec{c}\right|$ (1).

В ΔOCK имеем: $|\vec{b}+\vec{c}|<|\vec{b}|+\left|\vec{c}\right|$.

тогда, неравенство (1) еще более усиливается:

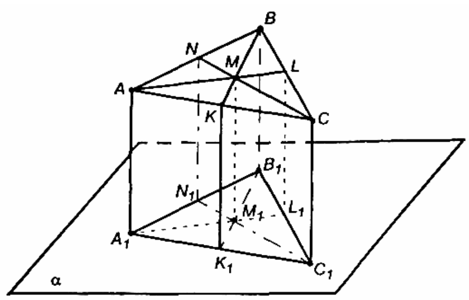
$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|<\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|+\left|\vec{c}\right|$.

Т.е. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|<\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{AC}\right|+\left|\overrightarrow{AD}\right|$,

$\left|\overrightarrow{AO}\right|<\frac{1}{3}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{AC}\right|+\left|\overrightarrow{AD}\right|\right)$, утверждение доказано.

372. См. решение в учебнике.

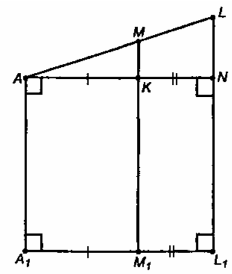
373. Из отрезков AA_1, BB_1, CC_1 выберем наименьший и через эту вершину ΔABC проведем плоскость, параллельную α. Проведем медиану AL в ΔABC и рассмотрим проекцию AL на построенную плоскость.



$\Delta MAK \sim \Delta LAN$, значит, $\frac{AK}{AM}=\frac{AN}{AL}$;

$AK=A_1M_1$, $A_1L_1=AN$;

$$\frac{A_1M_1}{AM}=\frac{A_1L_1}{AL},\ \frac{A_1M_1}{\frac{2}{3}AL}=\frac{A_1L_1}{AL}, \text{ значит, } A_1M_1=\frac{2}{3}A_1L_1.$$



Аналогично проведем медиану CN в ΔABC и точно так же спроектируем ее на плоскость, параллельную пл. α, из подобия треугольников имеем: $C_1M_1=\frac{2}{3}C_1N_1$.

Построим медиану BK в ΔABC, тогда

$$BM_1=\frac{2}{3}B_1K_1.$$

Значит, в $\Delta A_1B_1C_1$ точка M_1 есть точка пересечения медиан этого треугольника.

Если M – произвольная точка пространства, а точка M_1 – точка пересечения медиан $\Delta A_1B_1C_1$, то имеет место равенство

$$\overrightarrow{MM_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MC_1});\ \overrightarrow{MA_1}=\overrightarrow{MM_1}+\overrightarrow{M_1A_1}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AA_1},$$

$$\overrightarrow{MB_1}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BB_1},\ \overrightarrow{MC_1}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CC_1}.$$

Тогда, $\overrightarrow{MM_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CC_1})=$

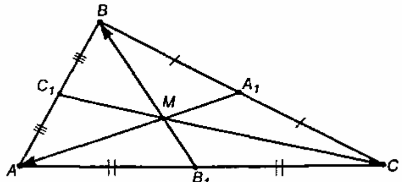
$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}).$$

Но $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$, поэтому $\overrightarrow{MM_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1})$.

Т.к. $\overrightarrow{MM_1}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AA_1}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BB_1}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CC_1}$, то можно записать равенство на длины векторов:

$$\left|\overrightarrow{MM_1}\right|=\frac{1}{3}(\left|\overrightarrow{AA_1}\right|+\left|\overrightarrow{BB_1}\right|+\left|\overrightarrow{CC_1}\right|).$$

Замечание: Докажем, что $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=\vec{0}$.



$\vec{BB_1}=\frac{1}{2}(\vec{BA}+\vec{BC})$, $\vec{AA_1}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})$, $\vec{CC_1}=\frac{1}{2}(\vec{CB}+\vec{CA})$,

$|\vec{MB}|=\frac{2}{3}|\vec{B_1B}|$, $|\vec{MA}|=\frac{2}{3}|\vec{A_1A}|$, $|\vec{MC}|=\frac{2}{3}|\vec{C_1C}|$.

$$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=\frac{2}{3}(\vec{B_1B}+\vec{A_1A}+\vec{C_1C})=-\frac{2}{3}(\vec{BB_1}+\vec{AA_1}+\vec{CC_1})=$$

$$=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left[(\vec{BA}+\vec{BC})+(\vec{AB}+\vec{AC})+(\vec{CB}+\vec{CA})\right]=$$

$$=-\frac{1}{3}\left[(-\vec{AB}+\vec{AB})+(\vec{BC}-\vec{BC})+(\vec{AC}-\vec{AC})\right]=-\frac{1}{3}\cdot\vec{0}=\vec{0}.$$

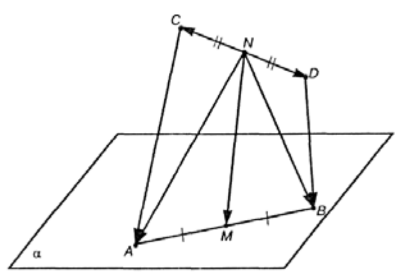
Итак: доказано, что $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=\vec{0}$.

Предположим, что ΔABC так пересекается с плоскостью α, что точка пересечения медиан лежит в плоскости α. Следовательно MM_1=0, а сумма длин перпендикуляров, проведенных из вершин ΔABC к плоскости α, конечно же, не равна 0.

Тогда, в случае, когда некоторые стороны ΔABC пересекаются с плоскостью α, данное равенство может терять смысл.

Ответ: в общем случае – нет.

374.



Т.к. точка M – середина AB, то $\vec{NM}=\frac{1}{2}(\vec{NA}+\vec{NB})$.

Имеем: $\vec{NA}=\vec{NC}+\vec{CA}$, $\vec{NB}=\vec{ND}+\vec{DB}$, $\vec{NM}=\frac{1}{2}(\vec{NC}+\vec{CA}+\vec{ND}+\vec{DB})$,

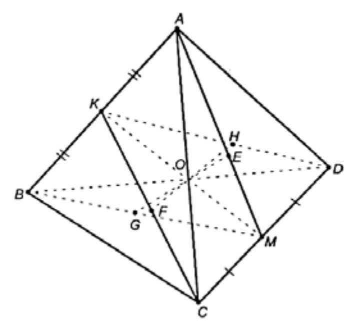
но $\vec{NC}+\vec{ND}=\vec{0}$, значит, $\vec{NM}=\frac{1}{2}(\vec{CA}+\vec{DB})$, или $-\vec{MN}=\frac{1}{2}(-\vec{AC}+(-\vec{BD}))$,

или $\vec{MN}=\frac{1}{2}(\vec{AC}+\vec{BD})$, таким образом,

$$|\vec{MN}|=\frac{1}{2}|\vec{AC}+\vec{BD}|\le\frac{1}{2}|\vec{AC}|+\frac{1}{2}|\vec{BD}|.$$

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$ сонаправлены.

375.



AE = *EM*, *KF* = *FC*, *BG* = *GM*, *KH* = *HD*. Точки *К* и *М* пересекаются по прямой *KM* (как общие для плоскостей *ABM* и *DCK*).

FH – средняя линия в ΔDKC,

$FH \parallel DC$, $FH=\frac{1}{2}DC$.

При этом *KO*=*OM*, где *O* – точка пересечения *FH* с отрезком *KM*.

GE – средняя линия в ΔABM, значит,

$GE \parallel AB$, $GE=\frac{1}{2}AB$.

При этом *KO* = *OM*, где *O* – точка пересечения *GE* с отрезком *KM*.

Т.е. отрезки *FH* и *GE* пересекаются в точке *O*.

$\Delta FAO \sim \Delta CAM$ (по 1-му признаку).

Следовательно: $\frac{FA}{CA}=\frac{OA}{MA}=\frac{FO}{CM}$,

значит,

$\frac{1}{2}=\frac{OA}{MA}=\frac{FO}{CM}$, откуда $CM=2\cdot FO$,

но *CM*=*MD*, следовательно, *MD*=2*FO*=2 · *OH*, тогда *FO*=*OH*. Значит, *O* – середина *FH*.

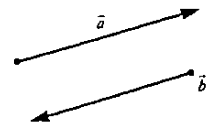
Далее, т.к. *GE* – средняя линия в ΔABM и *AK* = *KB*, то *OE*=*OG*, *O* – середина *GE*.

Тогда, *EFGH* – параллелограмм по признаку параллелограмма.

ВОПРОСЫ К ГЛАВЕ IV

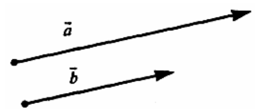
1. а) Да

б) Нет. Пример:

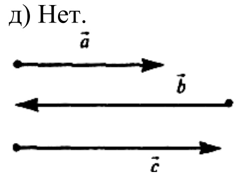


в) Да.

г) Нет. Пример:

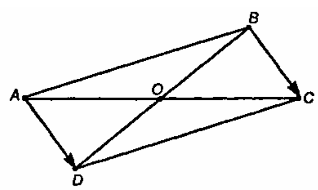


д) Нет.



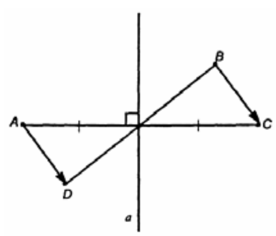
Очевидно, что $\vec{a}$ и $\vec{c}$ сонаправлены.

е) Да.



2. Построим отрезки *AB* и *DC*. *ABCD* – параллелограмм, т.к. *AD* = *BC* и *AD* || *BC*. Тогда *DO*=*OB* (свойство диагоналей параллелограмма).

Значит, *B* и *D* симметричны относительно т. *O*.

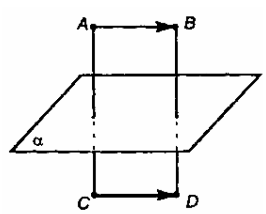


3. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

а) Векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$ *не* обязательно будут перпендикулярны к прямой *a,* поэтому прямая $\vec{a}$ может образовывать некоторый угол с плоскостью параллелограмма *ABCD,* а, следовательно, и с прямой *DB*.

Тогда точки *B* и *D* не будут симметричными относительно прямой *a*.

б) Да.

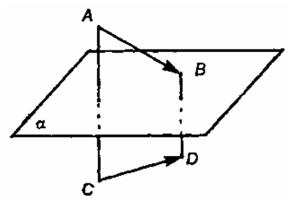


4. а) Да. Например:

$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Плоскость α перпендикулярна *AC* и *BD* в их серединах.

б) Да. Например:

$\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$



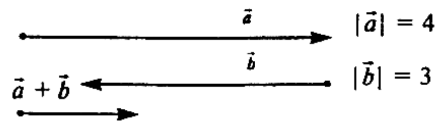
5. $\vec{a} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$;

$\vec{a} = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$, $\vec{b} = \vec{a}\left(\dfrac{1}{\lambda} - 1\right)$.

Следовательно, $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$.

6. Да. Например:

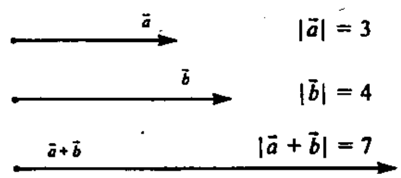
пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и противоположно направлены.



$| \vec{a} + \vec{b} | = 1$;

$| \vec{a} + \vec{b} | < | \vec{a} |$, $| \vec{a} + \vec{b} | < |\vec{b}|$.

7. Да, если векторы коллинеарны и сонаправлены, например:



8. Рассмотрим возможные случаи:

а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и сонаправлены.

Пусть $| \vec{a} | = 3$, $| \vec{b} | = 1$, тогда

$| \vec{a} | + | \vec{b} | = 3 + 1 = 4$ и

$| \vec{a} - \vec{b} | = 2$, $4 \neq 2$,

т.е. равенство $| \vec{a} - \vec{b} | = | \vec{a} | + | \vec{b} |$ не верно.

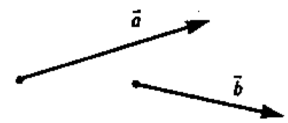
б) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и противоположно направлены.

Пусть $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$.

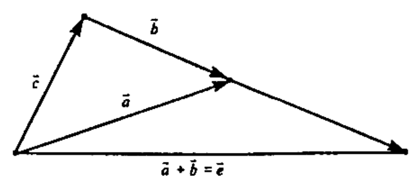
$|\vec{a}| + |\vec{b}| = 3 + 1 = 4$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$, 4=4,

т.е. равенство $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ верно.

в)



Параллельным переносом совмещаем векторы.

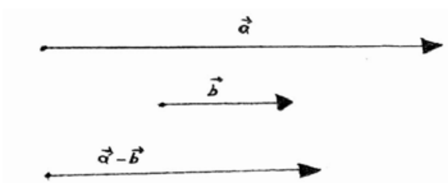


$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b}$.

Возможен случай, что треугольник будет равнобедренный, и $|\vec{c}| = |\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{e}| = |\vec{a} + \vec{b}|$. Но $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ верно только для случая сонаправленных коллинеарных векторов, однако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – произвольные. Т.е. равенство $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ невозможно.

Ответ: Да, например в случае б).

9. Да. Например,



положим: $|\vec{a}| = 6$;

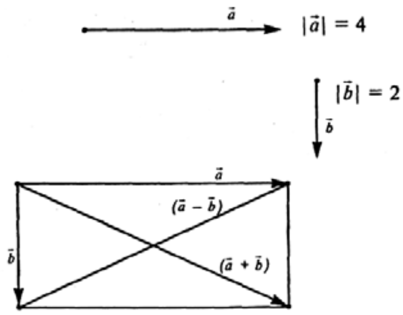
$|\vec{b}| = 2$;

$|\vec{a} - \vec{b}| = 4$;

$|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}| = 4$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обязаны быть коллинеарными и одинаково направлены.

10. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Для них сложение и вычитание производится как для обычных чисел, а сумма двух ненулевых чисел не равна их разности. Рассмотрим особый случай, когда угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – 90°.



$|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+\vec{b}|$ по свойству диагоналей прямоугольника.

Ответ: да.

11. а) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ и $|\vec{b}|=|\vec{a}|$;

λ=1.

Проверим: $\vec{b}=\vec{a}$. По определению равных векторов имеем:

$\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$ и $|\vec{b}|=|\vec{a}|$.

б) $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ и $|\vec{b}|=3|\vec{a}|$;

λ=–3.

Проверим: $\vec{b}=-3\vec{a}$; $\vec{b}$ и $\vec{a}$ – противоположно направлены, $|\vec{b}|=|-3\vec{a}|=3|\vec{a}|$.

в) $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$ и $|\vec{b}|=k|\vec{a}|$;

λ=–k, $k<0$.

Проверим: $\vec{b}=-k\cdot\vec{a}$; $\vec{a}\cdot(-k)$ противоположно направлены, $|\vec{b}|=|-k\vec{a}|=k\cdot|\vec{a}|$

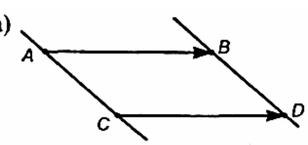
г) На 0.

Ответ: а) 1; б) –3; в) $-k$, $k>0$; г) 0.

12. $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{CD}$;

k=1 (для параллельности AC и BD $ABCD$ обязан быть параллелограммом; для этого необходимо $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, тогда k=1).

а)



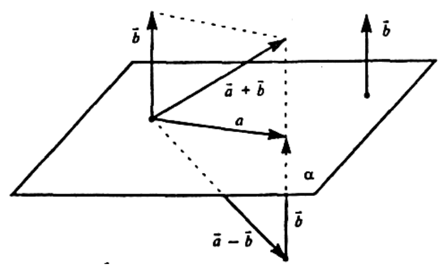
б) $k \neq 1$ и $k \neq 0$. Прямые AC и BD не могут скрещиваться, т.к. $AB \parallel BD$, а две параллельные прямые всегда принадлежат одной плоскости.
Ответ: а) k=1; б) $k \neq 1$, при этом $k \neq 0$; не могут.

13. а) $\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a}, 3\vec{b}$

Векторы компланарны, если при откладывании их от одной точки все они принадлежат одной плоскости.

Вектора $\vec{a}$ и $2\vec{a}$, $\vec{b}$ и $3\vec{b}$ компланарны. А так как плоскость определяется двумя пересекающимися прямыми однозначно, то все эти вектора лежат в одной плоскости. Следовательно, они компланарны.

б) Да. .Например:



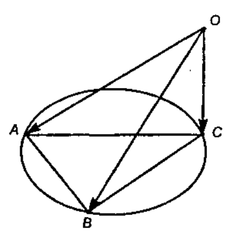
Ответ: а) Да; б) Да.

14. Т.к. $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, то $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$.

а) $\vec{a}$, $2\vec{b}$, $3\lambda\vec{a} + 3\mu\vec{b}$ — компланарны, т.к. умножение вектора на число не влияет на свойство компланарности.

б) $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a} + 2\lambda\vec{a} + 2\mu\vec{b}$, $2\vec{b} - 2\lambda\vec{a} - 3\mu\vec{b}$ — компланарны.
Ответ: а) да; б) да.

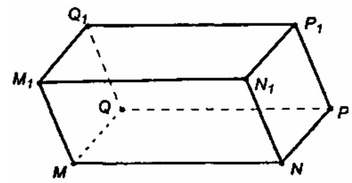
15.



Ответ: нет.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ IV

376.



а) Боковые стороны и основания параллелепипеда параллельны. Значит, вектора $\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{M_1Q_1}$, $\overrightarrow{N_1P_1}$, $\overrightarrow{NP}$

б) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P_1Q_1}$;

$\overrightarrow{P_1Q_1} + \overrightarrow{NP_1} = \overrightarrow{NP_1} + \overrightarrow{P_1Q_1} = \overrightarrow{NQ_1}$.

Таким образом, $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NP_1} = \overrightarrow{NQ_1}$.

в) $\overrightarrow{Q_1P_1} + \overrightarrow{QQ_1} = \overrightarrow{QQ_1} + \overrightarrow{Q_1P_1} = \overrightarrow{QP_1}$.

377.

а) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BD}$ т.к. векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BF}$ и $\overrightarrow{FD}$ принадлежат одной плоскости, их длины равны, а $ABFD$ – параллелограмм.

Откуда: $-\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FB} = -\overrightarrow{DB}$, или $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{DB}$.

б) $ACFE$ – параллелограмм.

$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CE}$, $-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{EC}$.

в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF}$,

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF}$

Сложим равенства и получим:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = 2 \cdot \overrightarrow{AF}$.

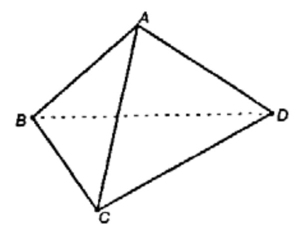
378.

Пусть $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Докажем, что $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$. По определению разности векторов, нужно показать, что $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$.

$\vec{c} + \vec{b} = (\vec{a} + (-\vec{b})) + \vec{b} = \vec{a} + ((-\vec{b}) + \vec{b}) = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, значит, $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$.

Что и требовалось доказать.

379.



а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} =$

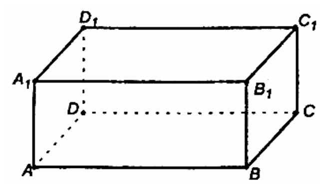
$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$.

б) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) +$

$+ (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

Ответ: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}$; в) $\vec{0}$.

380.



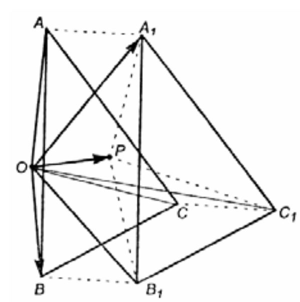
а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+$
$+\overrightarrow{B_1C_1}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DD_1})=$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{CD_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+$
$+\overrightarrow{CD_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD_1}=\overrightarrow{AD_1}$.

б) $\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{A_1A}=(\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{B_1C_1})+$
$+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{A_1A}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC_1})+$
$+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{AC_1}+\vec{0}=\overrightarrow{AC_1}$.

в) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=$
$=\vec{0}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}$.

Ответ: а) $\overrightarrow{AD_1}$; б) $\overrightarrow{AC_1}$; в) $\overrightarrow{DB}$.

381.



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_1}\\ \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB_1}\\ \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC_1}\end{array}\right\| \begin{array}{l}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}\\ -\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC};\\ \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{OB_1}\\ \overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{OC_1}\\ \overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{OC_1}\end{array}\right\| \begin{array}{l}\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{A_1B_1}\\ \overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{A_1C_1}.\end{array}$$

Сложим равенства:

$$\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_1}\\ \underline{-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}}\\ \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{AB}\end{array}$$
, получим:

$\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{AB}$, откуда $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}$.

Т.к. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$, то $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{A_1B_1}|$.

Сложим равенства:

$$\begin{array}{l}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}\\ \underline{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_1}}\\ \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{OA_1}\end{array}$$
, получим:

$\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OA_1}$, откуда $\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AC}$.

Т.к. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$, то $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{A_1C_1}|$.

Т.к. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, то $AB \parallel A_1B_1$, а, т.к. $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{A_1C_1}$, то $AC \parallel A_1C_1$.

тогда, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ как углы с соответственно параллельными и сонаправленными сторонами.

Значит, $\Delta BAC = \Delta B_1A_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними.

Докажем, что $BC \parallel B_1C_1$.

Имеем:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{A_1C_1}$.

Т.к. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$, то и $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$, следовательно, $BC \parallel B_1C_1$.

382.

$\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$.

а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны при всех значениях k;

б) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ при $k \geq 0$;

в) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ при $k < 0$;

г) $\vec{a} = -\vec{b}$ при $k = -1$.

383.

а) Предположим, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то есть $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$.

Значит, $\vec{a} + k\vec{b} = \vec{a} + k\lambda\vec{a} = \vec{a}(1 + k\lambda)$, и $\vec{a} + l\vec{b} = \vec{a} + l\lambda\vec{a} = \vec{a}(1 + l\lambda)$.

Получили, что векторы $(1+k\lambda)\vec{a}$ и $(1+l\lambda)\vec{a}$ коллинеарны, т.е. и соответствующие им векторы $\vec{a} + k\vec{b}$ и $\vec{a} + l\vec{b}$ тоже коллинеарны, что противоречит условию задачи.

Значит, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

б) Пусть векторы $\vec{a} + k_1\vec{b}$ и $\vec{a} + l_1\vec{b}$ коллинеарны, значит, $\vec{a} + k_1\vec{b} = \lambda(\vec{a} + l_1\vec{b})$,

$\vec{a}(1-\lambda) = \vec{b}(\lambda l_1 - k_1)$, $\vec{b} = \dfrac{1-\lambda}{\lambda l_1 - k_1} \cdot \vec{a}$.

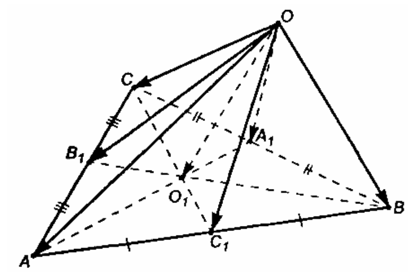
Пусть $\mu = \dfrac{1-\lambda}{\lambda l_1 - k_1}$, значит, $\vec{b} = \mu \cdot \vec{a}$.

Тогда $\vec{a} + k\vec{b} = \vec{a} + k\mu\vec{a} = \vec{a}(1 + k\mu)$,

$\vec{a}+l\vec{b}=\vec{a}+l\mu\vec{a}=\vec{a}(1+l\mu)$, то есть векторы $(1+k\mu)\vec{a}$ и $(1+l\mu)\vec{a}$ – коллинеарны, и соответствующие им векторы $\vec{a}+k\vec{b}$ и $\vec{a}+l\vec{b}$ – коллинеарны. Что противоречит условию задачи.

Значит, векторы $\vec{a}+k\vec{b}$ и $\vec{a}+l\vec{b}$ не коллинеарны.

384.



$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA_1}=\overrightarrow{OA_1}$,

$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B}=\overrightarrow{OB}$,

$\overrightarrow{CA_1}=\overrightarrow{A_1B}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$, значит,

$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA_1}=\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OB}$, откуда

$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=2\cdot\overrightarrow{OA_1}$.

Запишем аналогичные равенства для других боковых граней.

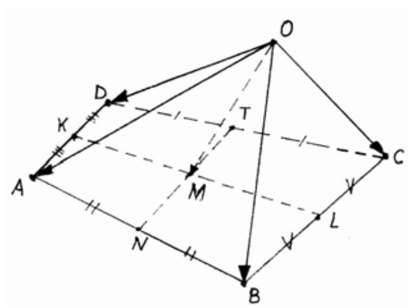
$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=2\cdot\overrightarrow{OB_1}$ и $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}=2\cdot\overrightarrow{OC_1}$.

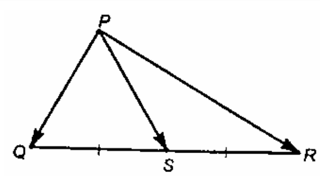
Складывая эти три равенства, получим:

$2(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=2(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1})$, следовательно,

$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

385.





Для произвольного ΔPQR.

$2\cdot\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}$.

Для каждой грани пирамиды $OABCD$ запишем равенство:

$2\cdot\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA}$,

$2\cdot\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}$,

$2\cdot\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$,

$2\cdot\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

Сложив их, будем иметь:

$$2(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{ON})=$$
$$=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$$

или $\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

Для ΔOKL имеем $2 \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OL}$.

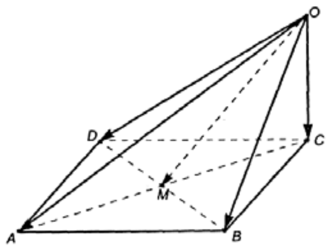
Для ΔOMN имеем $2 \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{ON}$.

Получим $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OM} = 4\overrightarrow{OM}$.

Значит, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

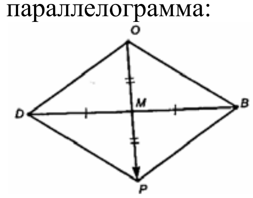
386.

Для ΔAOC: $2 \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$; для ΔDOC: $2 \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}$. Сложим равенства, получим:



$4 \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$, $OM = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

Достроим ΔDOB до параллелограмма:



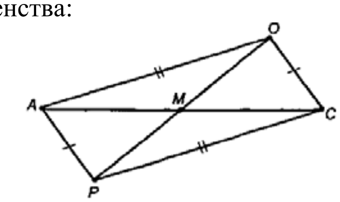
$OP = 2 \cdot OM$. В ΔDOP имеем $OP < OD + DP$
или $OP < OD + OB$, $2 \cdot OM < OD + OB$,

$2 \cdot |\overrightarrow{OM}| < |\overrightarrow{OD}| + |\overrightarrow{OB}|$.

Достроим ΔAOC до параллелограмма:
$OP = 2 \cdot OM$, $OP < OC$, или $2 \cdot OM < OA + OC$,

$2|\overrightarrow{OM}| < |\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OC}|$.

Сложим неравенства:

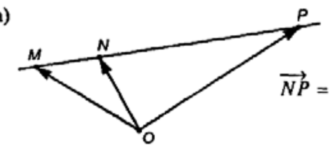


$2 \cdot OM < OD + OB$, получим:
$2 \cdot OM < OA + OC$
$4 \cdot OM < OA + OB + OC + OD$,

окончательно имеем: $OM < \frac{1}{4}(OA + OB + OC + OD)$.

387.

а)



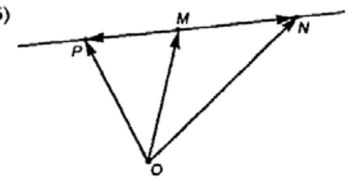
$\overrightarrow{NP} = 2\overrightarrow{MN}$.

$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON}, \quad \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$,

$\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{OP}, \quad \overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{OP}$,

$\overrightarrow{ON} + 2(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OP}, \quad 3\overrightarrow{ON} - 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP}$.

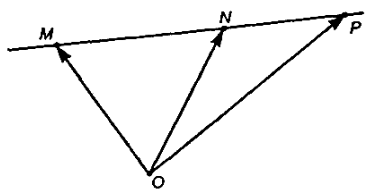
б)



$PM = MN$,

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{ON})$, $2 \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OP} = 2 \cdot \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$.

в)



$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{OP}$,

$\overrightarrow{MP} = k \cdot \overrightarrow{MN}$. Пусть $\overrightarrow{NP} = \lambda \cdot \overrightarrow{MN}$, значит,

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MN} + \lambda \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN}(1 + \lambda) = \overrightarrow{MN} \cdot k$, откуда

$1+\lambda=k$, $\lambda=k-1$.

Получили $\overrightarrow{NP} = (k-1) \cdot \overrightarrow{MN} = (k-1)(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM})$,

$\overrightarrow{ON} + (k-1)(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{OP}$;

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + k\cdot\overrightarrow{ON} - k\cdot\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OM} = k\cdot\overrightarrow{ON} + (1-k)\cdot\overrightarrow{OM}.$$

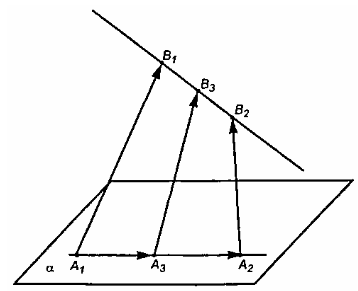
Ответ: а) $\overrightarrow{OP} = 3\cdot\overrightarrow{ON} - 2\cdot\overrightarrow{OM}$; б) $\overrightarrow{OP} = 2\cdot\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}$;
в) $\overrightarrow{OP} = k\cdot\overrightarrow{ON} + (1-k)\cdot\overrightarrow{OM}$.

388.

а) Вектор $\vec{0}$ компланарен любому вектору; точки начала двух других векторов совмещаются параллельным переносом, потому что через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.

б) Два коллинеарных вектора расположены или на параллельных прямых, или на одной прямой. Т.к. через две параллельных прямые проходит единственная плоскость, параллельным переносом прямые можно совместить. Начало третьего вектора можно параллельным переносом совместить с любой точкой прямой, на которой лежат два коллинеарных вектора. Через две пересекающиеся прямые проходит ровно одна плоскость, значит, три вектора компланарны.

389.



Пусть $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{x}$, $\overrightarrow{A_3B_3} = \vec{y}$, $\overrightarrow{A_2B_2} = \vec{z}$, тогда

$\vec{x} + \overrightarrow{B_1B_3} = \overrightarrow{A_1A_3} + \vec{y}$,(1)

$\vec{y} + \overrightarrow{B_3B_2} = \overrightarrow{A_3A_2} + \vec{z}$.(2)

Из условия, $\overrightarrow{A_1A_2} = k\cdot\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{B_1B_2} = k\cdot\overrightarrow{B_1B_3}$;

$\overrightarrow{A_1A_3} + \overrightarrow{A_3A_2} = \overrightarrow{A_1A_2} = k\cdot\overrightarrow{A_1A_3}$, откуда $\overrightarrow{A_3A_2} = \overrightarrow{A_1A_3}(k-1)$.

$\overrightarrow{B_1B_3} + \overrightarrow{B_3B_2} = \overrightarrow{B_1B_2} = k\cdot\overrightarrow{B_1B_3}$, значит, $\overrightarrow{B_3B_2} = (k-1)\cdot\overrightarrow{B_1B_3}$.

Подставим эти выражения в (1) и (2).

$\vec{x} + \overrightarrow{B_1B_3} = \overrightarrow{A_1A_3} + \vec{y}$,(3)

$\vec{y} + (k-1)\overrightarrow{B_1B_3} = \overrightarrow{A_1A_3}(k-1) + \vec{z}$. (4)

Из (3) получим $\overrightarrow{B_1B_3} - \overrightarrow{A_1A_3} = \vec{y} - \vec{x}$.

Преобразуем равенство (4)

$\vec{y} + k\cdot\overrightarrow{B_1B_3} - \overrightarrow{B_1B_3} = \overrightarrow{A_1A_3}\cdot k - \overrightarrow{A_1A_3} + \vec{z}$,

$\vec{y} + k(\overrightarrow{B_1B_3} - \overrightarrow{A_1A_3}) = (\overrightarrow{B_1B_3} - \overrightarrow{A_1A_3}) + \vec{z}$,

$\vec{y} + k \cdot (\vec{y} - \vec{x}) = \vec{y} - \vec{x} + \vec{z}$,

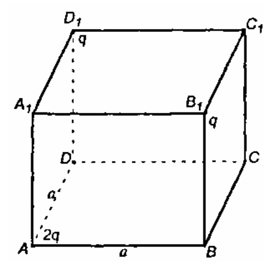
$k\vec{y} - k\vec{x} = -\vec{x} + \vec{z}$,

$\vec{x}(k-1) - k\vec{y} + \vec{z} = 0$, или $\vec{z} = k\vec{y} - \vec{x}(k-1) = k\vec{y} + (1-k)\vec{x}$, следовательно

$\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ компланарны. Тогда в пространстве всегда найдется плоскость, параллельная плоскости, содержащей эти три вектора.

390.

Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором $AB=AD=a$, $AA_1=2a$. В вершинах B_1 и D_1 помещены заряды q, а в вершине A – заряд $2q$.



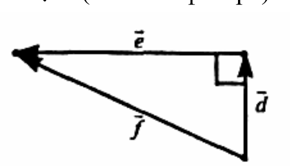
а) $\vec{E}(A_1) = \frac{k \cdot 2q}{AA_1^3} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \frac{k \cdot q}{B_1A_1^3} \cdot \overrightarrow{B_1A_1} + \frac{k \cdot q}{D_1A_1^3} \cdot \overrightarrow{D_1A_1} =$

$= \frac{k \cdot 2q}{8a^3}\overrightarrow{AA_1} + \frac{kq}{a^3}\overrightarrow{B_1A_1} + \frac{kq}{a^3}\overrightarrow{D_1A_1} = \frac{kq}{a^3}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{D_1A_1}\right)$.

Пусть $\frac{1}{4}\overrightarrow{AA_1} = \vec{d}$, $|\vec{d}| = \frac{1}{4} \cdot 2a = \frac{a}{2}$.

$\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{D_1A_1} = -\overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{A_1D_1} = -(\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1D_1}) = -\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{C_1A_1}$,

$|\overrightarrow{C_1A_1}| = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ (по т. Пифагора).



Пусть $\vec{e} = \overrightarrow{C_1A_1}$, следовательно,

$\vec{e} + \vec{d} = \vec{f}$ и $\vec{d} \perp \vec{c}$.

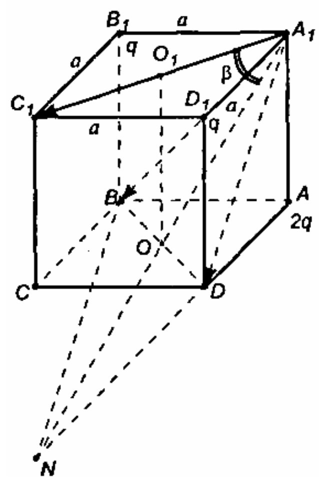
$|\vec{f}| = \sqrt{|\vec{e}|^2 + |\vec{d}|^2} = \sqrt{2a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{9a^2}{4}} = \frac{3a}{2}$,

$$|\vec{E}(A_1)| = \frac{kq}{a^3} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3kq}{2a^2}.$$

б) $\vec{E}(C) = \dfrac{k \cdot 2q}{AC^3} \cdot \overrightarrow{AC} + \dfrac{kq}{D_1C^3} \cdot \overrightarrow{D_1C} + \dfrac{kq}{B_1C^3} \cdot \overrightarrow{B_1C} =$

$$= \frac{k \cdot 2q}{a^3 \cdot 2\sqrt{2}} \overrightarrow{AC} + \frac{kq}{5a^3 \cdot \sqrt{5}} \overrightarrow{D_1C} + \frac{kq}{a^3 \cdot 5\sqrt{5}} \overrightarrow{B_1C} =$$

$$= \frac{kq}{a^3}\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{\sqrt{2}} + \frac{\overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{D_1C}}{5\sqrt{5}}\right) = \frac{kq}{a^3}\left(\frac{\overrightarrow{A_1C_1}}{\sqrt{2}} + \frac{\overrightarrow{A_1D} + \overrightarrow{A_1B}}{5\sqrt{5}}\right).$$



$$A_1D = A_1B = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{5};$$

$ABND$ – ромб.

$$\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1D} = \overrightarrow{A_1N}.$$

По теореме косинусов из ΔBA_1D имеем:

$$(a\sqrt{2})^2 = (a\sqrt{5})^2 + (a\sqrt{5})^2 -$$

$$-2 \cdot a\sqrt{5} \cdot a\sqrt{5} \cdot \cos\alpha;$$

$$2a^2 = 10a^2 - 10a^2 \cos\alpha,$$

$$10\cos\alpha = 8; \cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

Из ΔA_1BN по теореме косинусов имеем:

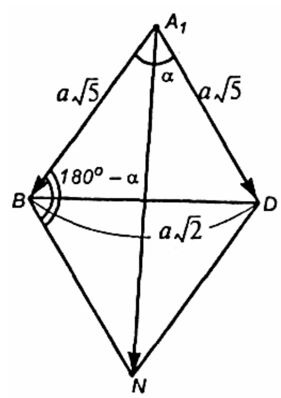
$$|\overrightarrow{A_1N}|^2 = (a\sqrt{5})^2 + (a\sqrt{5})^2 -$$

$$-2 \cdot a\sqrt{5} \cdot a\sqrt{5} \cdot \cos(180^\circ - \alpha) =$$

$$= 10a^2 + 10a^2 \cdot \cos\alpha = 10a^2 +$$

$$+10a^2 \cdot \frac{4}{5} = 18a^2,$$

$$|\overrightarrow{A_1N}| = 3\sqrt{2}a.$$

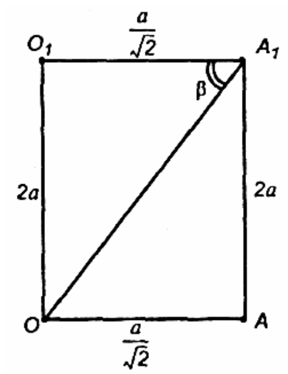


Пусть $\vec{e} = \dfrac{\overrightarrow{A_1D} + \overrightarrow{A_1B}}{5\sqrt{5}} = \dfrac{\overrightarrow{A_1N}}{5\sqrt{5}}$, значит,

$$|\vec{e}| = \frac{|\overrightarrow{A_1N}|}{5\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{2} \cdot a}{5\sqrt{5}}.$$

Пусть $\vec{d} = \dfrac{\overrightarrow{A_1C_1}}{\sqrt{2}}$, значит,

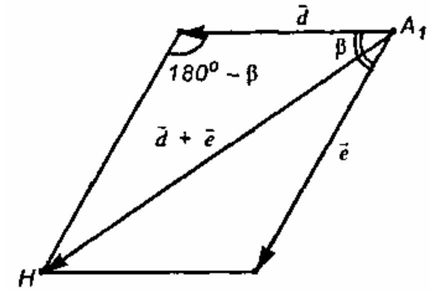
$$|\vec{d}| = \frac{|A_1C_1|}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = a\ .$$



Найдем угол между векторами $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{A_1N}$ – угол β.

$$\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{OA_1} = \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4a^2}\ = = \sqrt{\frac{a^2}{2} + 4a^2} = \frac{3a}{\sqrt{2}}\ ;$$

$$\cos\beta = \frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3a} = \frac{1}{3}\,.$$



Найдем $|\vec{d} + \vec{e}|$.

$\overrightarrow{A_1H} = \vec{d} + \vec{e}$;

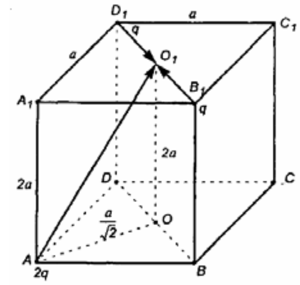
$$|\overrightarrow{A_1H}|^2 = |\vec{d}|^2 + |\vec{e}|^2 - 2\,|\vec{d}|\cdot|\vec{e}|\cos(180^\circ - \beta) =$$

$$= a^2 + a^2\cdot\frac{18}{125} + \frac{2\cdot 3\sqrt{2}\cdot a^2}{5\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{3} = \frac{143a^2}{125} + \frac{2\sqrt{2}a^2}{5\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{143a^2}{125} + \frac{2\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{5}}{(5\sqrt{5})^2}a^2 = \frac{143 + 10\sqrt{10}}{125}a^2\,.$$

Окончательно имеем:

$$|\vec{E}(C)| = \frac{kq}{a^3} \cdot \frac{a}{5\sqrt{5}} \sqrt{143 + 10\sqrt{10}} = \frac{kq}{a^2} \cdot \frac{\sqrt{143 + 10\sqrt{10}}}{5\sqrt{5}} .$$

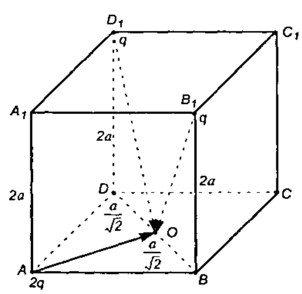


в) $\vec{E}(O_1) = \frac{kq}{D_1O_1^3} \cdot \overrightarrow{D_1O_1} + \frac{kq}{B_1O_1^3} \cdot \overrightarrow{B_1O_1} + \frac{k \cdot 2q}{AO_1^3} \cdot \overrightarrow{AO_1} =$

$$= \frac{kq}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3} (\overrightarrow{D_1O_1} + \overrightarrow{B_1O_1}) + \frac{k \cdot 2q}{\left(\frac{3a}{\sqrt{2}}\right)^3} \overrightarrow{AO_1} .$$

Т.к. $\overrightarrow{D_1O_1} = -\overrightarrow{B_1O_1}$, то $\vec{E}(O_1) = \frac{k \cdot 2q}{27a^3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \overrightarrow{AO_1}$,

$$|\vec{E}(O_1)| = \frac{4\sqrt{2}kq}{27a^3} \cdot \frac{3a}{\sqrt{2}} = \frac{4}{9a^3} \cdot kq .$$



г) $\vec{E}(O) = \frac{kq}{D_1O^3} \cdot \overrightarrow{D_1O} +$

$$+ \frac{kq}{B_1O^3} \cdot \overrightarrow{B_1O} + \frac{2kq}{AO^3} \cdot \overrightarrow{AO} ;$$

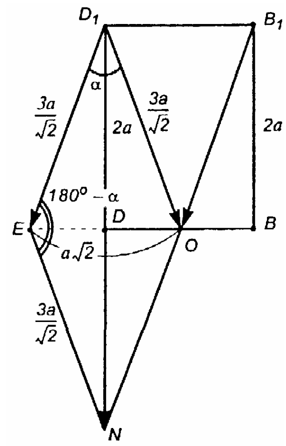
$$AO = \frac{1}{2} AC = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}} ,$$

$$D_1O = B_1O = \frac{3a}{\sqrt{2}} ,$$

$$\vec{E}(O) = \frac{kq}{\left(\frac{3a}{\sqrt{2}}\right)^3} (\overrightarrow{D_1O} + \overrightarrow{B_1O}) + \frac{2 \cdot k \cdot q}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)} \overrightarrow{AO} =$$

$$= \frac{kq \cdot 2\sqrt{2}}{27a^3} (\overrightarrow{D_1O} + \overrightarrow{B_1O}) + \frac{4\sqrt{2}kq}{a^3} \overrightarrow{AO} =$$

$$= \frac{kq}{a^3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{27}\cdot(\overrightarrow{D_1O}+\overrightarrow{B_1O})+4\sqrt{2}\,\overrightarrow{AO}\right).$$



Найдем сумму $\overrightarrow{D_1O}+\overrightarrow{B_1O}$.

Параллельно перенесем B_1O так, чтобы т. B_1 совпала с т. D_1. Получим вектор $\overrightarrow{D_1E}$.

$\overrightarrow{B_1O}+\overrightarrow{D_1O}=\overrightarrow{D_1O}+\overrightarrow{D_1E}=\overrightarrow{D_1N}$.

Из ΔOD_1E по теореме косинусов имеем:

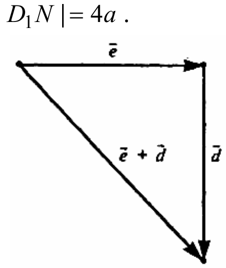
$$2a^2 = 2\cdot\frac{9a^2}{2}-2\cdot\frac{9a^2}{2}\cdot\cos\alpha,$$

$$9\cos\alpha = 7,\ \cos\alpha=\frac{7}{9}.$$

Из ΔD_1EN по теореме косинусов получим:

$$|\overrightarrow{D_1N}|^2 = 2\cdot\frac{9a^2}{2}-2\cdot\frac{9a^2}{2}\cos(180^\circ-\alpha)=9a^2+9a^2\cdot\frac{7}{9}=$$

$$=9a^2+7a^2=16a^2,\ |\overrightarrow{D_1N}|=4a.$$



Пусть $\vec{d}=\frac{2\sqrt{2}}{27}(\overrightarrow{D_1O}+\overrightarrow{B_1O})=\frac{2\sqrt{2}}{27}\overrightarrow{D_1N}$, тогда

$|\vec{d}|=\frac{2\sqrt{2}}{27}\cdot 4a=\frac{8\sqrt{2}a}{27}$. Пусть $\overrightarrow{AO}\cdot 4\sqrt{2}=\vec{e}$, тогда

$|\vec{e}|=4\sqrt{2}\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}=4a$.

Найдем $|\vec{d}+\vec{e}|$.

$$|\vec{e}+\vec{d}|^2=|\vec{e}|^2+|\vec{d}|^2=(4a)^2+(\frac{8\sqrt{2}a}{27})^2=16a^2+\frac{128a^2}{729}=$$

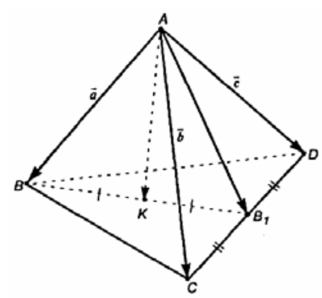
$$=\frac{11664+128}{729}a^2=\frac{11792}{729}a^2=\frac{16\cdot 737}{729}a^2.$$

Окончательно имеем: $|\vec{e}+\vec{d}|=\sqrt{\frac{16\cdot 737}{729}a^2}=\frac{4\sqrt{737}a}{27}$,

$$|\vec{E}(O)|=\frac{kq}{a^3}\cdot\frac{4a\sqrt{737}}{729}=\frac{4\sqrt{737}}{27a^2}\cdot kq.$$

Ответ: а) $\frac{3}{2a^2}\cdot kq$; б) $\frac{\sqrt{143+10\sqrt{10}}}{5\sqrt{5}a^2}\cdot kq$; в) $\frac{4}{9a^2}kq$; г) $\frac{4\sqrt{737}}{27a^2}\cdot kq$.

391.

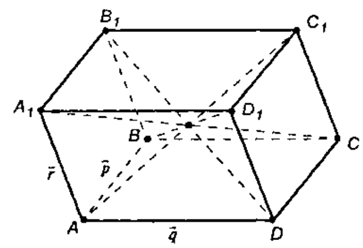


Проведем $\overrightarrow{AB_1}$. $KB=KB_1$, следовательно, имеем равенство: $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\overrightarrow{AB_1})$. Достроим ΔACD до параллелограмма; сложив $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ по правилу параллелограмма, получим, что их сумма $\vec{b}+\vec{c}$ равна диагонали параллелограмма, выходящей из вершины A. Но эта диагональ равна $2\cdot\overrightarrow{AB_1}$. Значит, $\vec{b}+\vec{c}=2\cdot\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AB_1}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$.

Таким образом, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$.

Ответ: $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$.

392.



$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC_1} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{CC_1} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$,

$\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AA_1} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA_1} = -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} =$

$= -(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{AA_1} = -\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$;

$\overrightarrow{B_1D} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B_1B} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = -\vec{r} + (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) =$

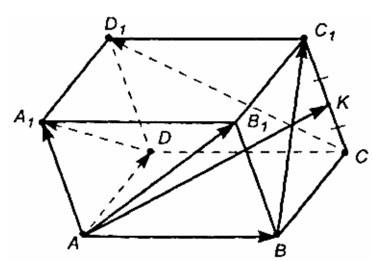
$= -\vec{r} - \vec{p} + \vec{q}$;

$\overrightarrow{DB_1} = -\overrightarrow{B_1D} = \vec{r} + \vec{p} - \vec{q}$;

$\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \vec{r} = \vec{q} - \vec{p} + \vec{r}$.

Ответ: $\overrightarrow{AC_1} = p + \vec{q} + \vec{r}$, $\overrightarrow{CA_1} = -\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$; $\overrightarrow{BD_1} = \vec{q} - \vec{p} + \vec{r}$; $\overrightarrow{DB_1} = \vec{r} + \vec{p} - \vec{q}$.

393.



а) $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$.

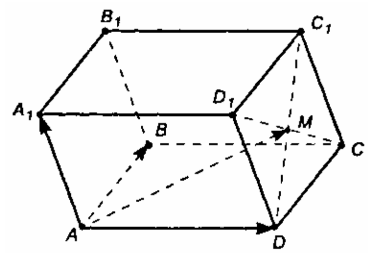
б) $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{BC_1}$, откуда $-\overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BC_1}$.

$\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{CD_1}$,

значит, $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{CD_1} - \overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{CD_1} + \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BC_1}$.

Ответ: а) $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$; б) $\overrightarrow{DA_1} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CD_1}$.

394.



$\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC_1}$, $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC_1}$, значит

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Ответ: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

395.

Пусть O – точка пересечения медиан ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{x}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{y}$, $\overrightarrow{CC_1} = \vec{z}$.

Пусть S – произвольная точка пространства, тогда

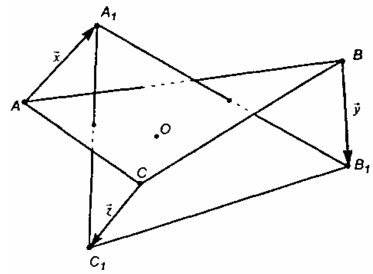
$\overrightarrow{SO} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$.

Тогда имеем:

$\overrightarrow{C_1O} = \frac{1}{3}(-\vec{z} + \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{C_1B})$,

$\overrightarrow{B_1O} = \frac{1}{3}(-\vec{y} + \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{B_1A})$.

$\overrightarrow{A_1O} = \frac{1}{3}(-\vec{x} + \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1C})$.

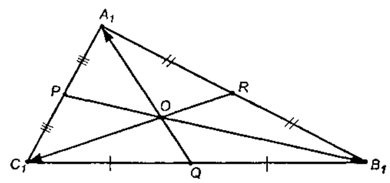


Сложим эти равенства, получим:

$$\overrightarrow{A_1O}+\overrightarrow{B_1O}+\overrightarrow{C_1O}=\frac{1}{3}(-\vec{x}+\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{A_1C}-\vec{z}+\overrightarrow{C_1A}+$$

$$+\overrightarrow{C_1B}-\vec{y}+\overrightarrow{B_1C}+\overrightarrow{B_1A}).\ (1).$$

Докажем, что $\overrightarrow{A_1O}+\overrightarrow{B_1O}+\overrightarrow{C_1O}=\vec{0}$.



$$\overrightarrow{A_1Q}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{A_1B_1}),$$

$$\overrightarrow{C_1R}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{C_1A_1}+\overrightarrow{C_1B_1}),$$

$$\overrightarrow{B_1P}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1});$$

$$|\overrightarrow{OA_1}|=\frac{2}{3}|\overrightarrow{QA_1}|,\ |\overrightarrow{OC_1}|=\frac{2}{3}|\overrightarrow{RC_1}|,\ |\overrightarrow{OB_1}|=\frac{2}{3}|\overrightarrow{PB_1}|;$$

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{QA_1}+\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{RC_1})=-\frac{2}{3}(\overrightarrow{A_1Q}+\overrightarrow{B_1P}+\overrightarrow{C_1R})=$$

$$=-\frac{2}{3}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{A_1B_1})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{C_1A_1}+\overrightarrow{C_1B_1}))=$$

$$=-\frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1A_1}+\overrightarrow{C_1B_1})=\vec{0}.$$

Используя равенство (1), имеем:

$$\vec{0}=\frac{1}{3}(-\vec{x}+\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{A_1C}-\vec{z}+\overrightarrow{C_1A}+\overrightarrow{C_1B}-\vec{y}+\overrightarrow{B_1C}+\overrightarrow{B_1A}),$$

$\overrightarrow{A_1B}=-\vec{x}+\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{C_1A}=-\vec{z}+\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{A_1C}=-\vec{x}+\overrightarrow{AC}$;

$\overrightarrow{C_1B} = -\vec{z} + \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{B_1C} = -\vec{y} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{B_1A} = -\vec{y} + \overrightarrow{BA}$.

$\vec{0} = -\vec{x} + (-\vec{x}) + \overrightarrow{AB} + (-\vec{x}) + \overrightarrow{AC} - \vec{z} + (-\vec{z}) + \overrightarrow{CA} + (-\vec{z}) +$

$+ \overrightarrow{CB} - \vec{y} + (-\vec{y}) + \overrightarrow{BC} + (-\vec{y}) + \overrightarrow{BA}$,

$\vec{0} = -3\vec{x} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 3\vec{z} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - 3\vec{y} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$;

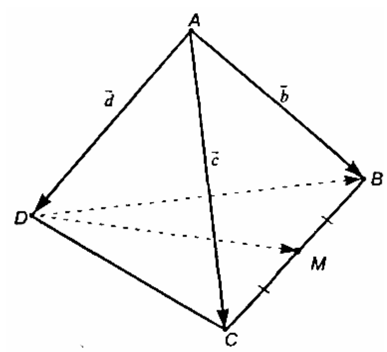
$\vec{0} = -3\vec{x} - 3\vec{y} - 3\vec{z} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC})$,

$\vec{0} = -3\vec{x} - 3\vec{y} - 3\vec{z} + \vec{0}$,

$\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{0}$, $\vec{z} = -1 \cdot \vec{x} - 1 \cdot \vec{y}$

Значит, векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ и $\vec{z}$ компланарны, значит, в пространстве существует плоскость, параллельная той, в которой лежат три данных вектора.

396.



$\vec{b} + \overrightarrow{BC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$,

$\vec{c} + \overrightarrow{CD} = \vec{d}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{d} - \vec{c}$,

$\vec{d} + \overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{d}$;

$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{d} + + \vec{c} - \vec{d}) = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{d}$.

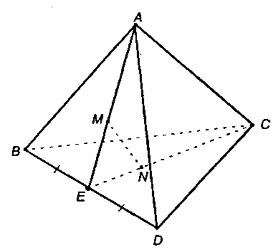
Ответ: $\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}$,

$\overrightarrow{CD} = \vec{d} - \vec{c}$,

$\overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{d}$,

$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{d}$.

397.



Построим медианы AE и CE.

$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{AE}=3\cdot\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{EC}=3\cdot\overrightarrow{EN}$,

$\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EN}=\overrightarrow{MN}$,

$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}=3\cdot\overrightarrow{ME}+3\cdot\overrightarrow{EN}=$

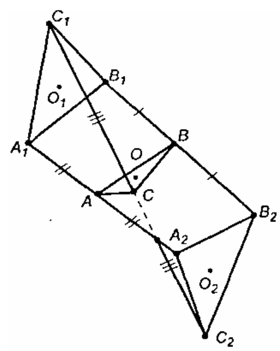
$=3\cdot(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EN})=3\cdot\overrightarrow{MN}$.

Т.е. $3\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}$, значит, $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{AC}$ – коллинеарны, то есть параллельны, $MN \parallel AC$.

$\frac{MN}{AC}=\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

398.



Пусть точки O_1, O, O_2 – точки пересечения медиан соответствующих треугольников.

Если медианы в ΔPQR пересекаются в точке O, а S – произвольная точка пространства, значит, $\overrightarrow{SO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{SP}+\overrightarrow{SQ}+\overrightarrow{SR})$.

Перепишем это равенство для данной задачи.

Пусть т. O – точка пространства, то относительно $\Delta A_1B_1C_1$ имеем:

$\overrightarrow{OO_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1})$, а по отношению к $\Delta A_2B_2C_2$ получим:

$\overrightarrow{OO_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OC_2})$. Тогда

$\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{OO_2}=\frac{1}{3}((\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2})+(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2})+(\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OC_2}))$.

Теперь воспользуемся тем, что если точка M – середина отрезка AB, то для всякой точки O имеем $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

Значит, $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}=2\cdot\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}=2\cdot\overrightarrow{OB}$,

$\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OC_2}=2\cdot\overrightarrow{OC}$, тогда $\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{OO_2}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{2}{3}\cdot\vec{0}=\vec{0}$

(см. доказательство в решении задачи 395).

Итак, $\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{OO_2}=\vec{0}$, что доказывает коллинеарность $\overrightarrow{OO_1}$ и $\overrightarrow{OO_2}$, а наличие у них общей т. O доказывает, что все три точки O, O_1, O_2 лежат на одной прямой.

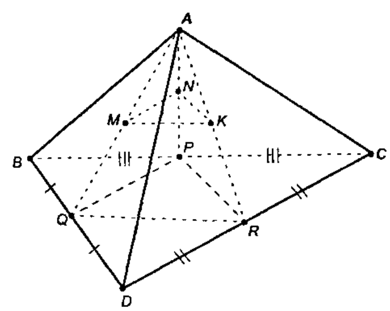
399.

Пусть медианы боковых граней пересекаются в точках M, N, K. Построим медианы AP, AQ, AR и средние линии ΔABC: PQ, PR, QR.

Тогда имеем:

$\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{AR}$, $\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AR}$,

$AN=\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}$, $\frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{MK}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AQ})=\frac{2}{3}\overrightarrow{QR}$, тогда, $\overrightarrow{MK}$ и $\overrightarrow{QR}$ коллинеарны, то есть $MK \parallel QR \parallel BC$.



Далее, $\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{AP}$,

$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ}$,

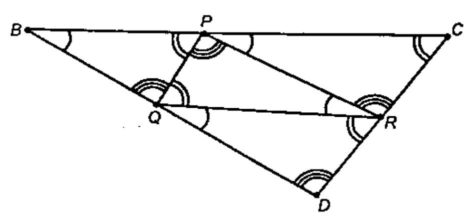
$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}$, или

$\frac{2}{3}\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}$,

$\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AQ})=\frac{2}{3}\overrightarrow{QP}$, значит, $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{QP}$ коллинеарны, то есть $MN \parallel QP \parallel DC$.

Аналогично получим, что $MK \parallel PR \parallel BD$.

Итак, $\Delta MKN \sim \Delta QPR$.



$\Delta PQR \sim \Delta DCB$, а т.к. $\Delta NMK \sim \Delta PQR$, то $\Delta NMK \sim \Delta DCB$.

Что и требовалось доказать.